Aula 10

BNB - Raciocínio Lógico e Quantitativo - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

12 de Maio de 2023

Índice

MÚLTIPLOS E DIVISORES

Múltiplos e divisores
Múltiplos e divisores de um número
—Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por B × k**, sendo **k** um número inteiro. **Exemplo**: os números da forma **A** = **7×k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro). Se **B divide A** deixando resto zero, então: • **B é divisor** de A; • **A é divisível** por B. — Se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**. — Se **A** é um **múltiplo** de **B**, então **B** é **divisor** de **A**.
Regras de divisibilidade
—**Divisibilidade por 2**: um número é divisível por 2 quando for par, isto é, quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8. —**Divisibilidade por 3**: um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3. —**Divisibilidade por 4**: um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos do número forem divisíveis por 4. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 00. —**Divisibilidade por 5**: um número é divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5. —**Divisibilidade por 6**: um número é divisível por 6 quando for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo. —**Divisibilidade por 8**: um número é divisível por 8 quando os três últimos algarismos do número forem divisíveis por 8. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 000. —**Divisibilidade por 9**: um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9. —**Divisibilidade por 10**: um número é divisível por 10 quando termina em 0. —**Divisibilidade por 11**: um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de ordem par (p) menos a soma dos algarismos de ordem ímpar (i) é um número divisível por 11. Essa regra inclui o caso particular em que $p - i = 0$, pois 0 é divisível por 11. —**Divisibilidade por 12**: um número é divisível por 12 quando for divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo. —**Divisibilidade por 15**: um número é divisível por 15 quando for divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.
Números primos
• **Números primos** são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o número 1 e o próprio número primo. • Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.** Para **determinar se um número N é primo**, devemos dividi-lo sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., e verificar se algum primo é divisor de **N**. — Se **algum primo for divisor** de **N**, então **N não é primo**; — Se, ao realizar a divisão sucessiva, **obtivermos um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo N**, então **N é primo**.

Para **decompor um número em fatores primos**, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

$$
\begin{array}{r|l}
500 & 2 \\
250 & 2 \\
125 & 5 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Obtenção dos divisores naturais de um número

- **O número 1 é sempre um divisor** de qualquer número e é por ele que devemos começar o método;
- Os divisores são obtidos pela **multiplicação de um fator primo por todos os divisores anteriores**;
- **Não se deve escrever mais de uma vez um divisor já obtido**, pois não é necessário.

$$
\begin{array}{r|c|l}
 & & \text{Divisores} \\
 & & 1 \\
500 & 2 & 2 \\
250 & 2 & 4 \\
125 & 5 & 5,\ 10,\ 20 \\
25 & 5 & 25,\ 50,\ 100 \\
5 & 5 & 125,\ 250,\ 500 \\
1 & &
\end{array}
$$

Quantidade de divisores naturais de um número

Para saber a quantidade de divisores naturais de um número qualquer, basta decompor o número em fatores primos e, em seguida:

- Obter todos os expoentes dos fatores primos;
- Somar 1 a cada um desses expoentes e realizar o produto dos números obtidos.

Se um número apresenta uma quantidade $\boldsymbol{p}$ de divisores naturais, com $\boldsymbol{p}$ primo, então esse número é da forma $\boldsymbol{q^{p-1}}$, sendo $\boldsymbol{q}$ também um número primo.

Divisores inteiros de um número

A quantidade de divisores inteiros é sempre o dobro do número de divisores naturais

Múltiplos e divisores de um número

Pessoal, nesse momento precisamos desenvolver alguns conceitos que por vezes geram dúvidas no concurseiro.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$\mathbf{7} \times 0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{7} \times 1 = \mathbf{7}$$

$$\mathbf{7} \times 2 = \mathbf{14}$$

$$\mathbf{7} \times 3 = \mathbf{21}$$

...

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$\mathbf{7} \ \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma **A** = **7** **×** **k** são múltiplos **de 7** (sendo **k** um número inteiro).

TOME NOTA!

Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto B × k**, sendo **k** um número inteiro.

(SSP AM/2022) Considere uma operação entre números inteiros maiores do que zero, representada pelo símbolo & e definida como:

$a\&b \ = 3a + b$, sendo a e b números inteiros positivos.

Considere também o conjunto C cujos elementos são os números inteiros x, maiores do que zero, tais que $x\&2$ seja múltiplo de 4 e menor do que 40.

O número de elementos do conjunto C é igual a

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários:

Conforme a definição do enunciado, temos:

$$x\&2 = 3x + 2$$

C é o conjunto dos **inteiros x** maiores do que zero tais que $3x + 2$ seja **múltiplo de 4** e **menor do que 40**.

Para verificar os números **inteiros x** maiores do que zero tais que $3x + 2$ seja **múltiplo de 4** e **menor do que 40**, vamos **igualar $3x + 2$ a todos os múltiplos de 4 maiores do que zero e menores do que 40**:

4, **8**, **12**, **16**, **20**, **24**, **28**, **32** e **36**.

Se nessa igualdade obtivermos um número x inteiro, então esse número pertence ao conjunto C.

$$\mathbf{3x + 2 = 4}$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

→ Não é inteiro → Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 8}$$

$$3x = 6$$

$$\mathbf{x = 3}$$

→ **É inteiro** → **Pertence ao conjunto C**

$$\mathbf{3x + 2 = 12}$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

→ Não é inteiro → Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 16}$$

$$3x = 14$$

$$x = \frac{14}{3}$$

→ Não é inteiro → Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 20}$$

$$3x = 18$$

$$\mathbf{x = 6}$$

→ **É inteiro** → **Pertence ao conjunto C**

$$\mathbf{3x + 2 = 24}$$

$$3x = 22$$

$$x = \frac{22}{3}$$

$\rightarrow$ Não é inteiro $\rightarrow$ Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 28}$$

$$3x = 26$$

$$x = \frac{26}{3}$$

$\rightarrow$ Não é inteiro $\rightarrow$ Não pertence ao conjunto C

$$\mathbf{3x + 2 = 32}$$

$$3x = 30$$

$$\mathbf{x = 10}$$

$\rightarrow$ **É inteiro** $\rightarrow$ **Pertence ao conjunto C**

$$\mathbf{3x + 2 = 36}$$

$$3x = 34$$

$$x = \frac{34}{3}$$

$\rightarrow$ Não é inteiro $\rightarrow$ Não pertence ao conjunto C

Portanto, o conjunto C apresenta **3 elementos**: **3**, **6** e **10**.

Gabarito: Letra C.

Divisores de um número

O que significa dizer que um número é divisor de outro?

TOME NOTA!

Um **número natural B é divisor de um número natural A** quando o **resultado da divisão de A por B deixar resto zero**.

Exemplos:

- **10 é divisor de** 50, pois o **resultado da divisão** de 50 **por 10** deixa **resto zero**;
- **33 é divisor de** 99, pois o **resultado da divisão** de 99 **por 33** deixa **resto zero**;
- **67 é divisor de** 469, pois o **resultado da divisão** de 469 **por 67** deixa **resto zero**.

Agora que entendemos o que significa dizer que um número é **divisor** de outro, devemos compreender a expressão "**divisível por**".

Basicamente, você deve saber que a expressão "**A é divisível por B**" é uma outra forma de dizer que "**B é divisor de A**". Exemplos:

- 50 é **divisível por** 10, pois 10 é **divisor de** 50;
- 99 é **divisível por** 33, pois 33 é **divisor de** 99;
- 469 é **divisível por** 67, pois 67 é **divisor de** 469;

Se **B divide A** deixando resto zero, então: • **B é divisor** de A; • **A é divisível** por B.

Relação entre múltiplo e divisor

Os conceitos de divisores e múltiplos estão intimamente relacionados.

Observe que se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**. Veja:

- 10 é divisor de 50 (a divisão deixa quociente 5 e resto 0).
  Logo, é verdade que 50 é múltiplo de 10 (de fato, pois $10 \times 5 = 50$).

- 33 é divisor de 99 (a divisão deixa quociente 3 e resto 0).
  Logo, é verdade que 99 é múltiplo de 33 (de fato, pois $33 \times 3 = 99$).

- 67 é divisor de 469 (a divisão deixa quociente 7 e resto 0).
  Logo, é verdade que 469 é múltiplo de 67 (de fato, pois $67 \times 7 = 469$).

Observe também que se **A** é **múltiplo** de **B**, então **B** é **divisor** de **A**. Veja:

- 70 é múltiplo de 7 (pois 7×10 = 70).
  Logo, é verdade que 7 é divisor de 70 (de fato, pois a divisão deixa quociente 10 e resto 0).

- 168 é múltiplo de 3 (pois 3×56 = 168).
  Logo, é verdade que 3 é divisor de 168 (de fato, pois a divisão deixa quociente 56 e resto 0).

- 480 é múltiplo de 5 (pois 5×96 = 480).
  Logo, é verdade que 5 é divisor de 480 (de fato, pois a divisão deixa quociente 96 e resto 0).

PRESTE MAIS
ATENÇÃO!

Se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**.

Se **A** é um **múltiplo** de **B**, então **B** é **divisor** de **A**.

(TRT 15/2009) Certo dia, Eurídice falou a Josué:

− Hoje é uma data curiosa, pois é dia de nosso aniversário, sua idade se escreve ao contrário da minha e, além disso, a diferença entre as nossas idades é igual ao nosso tempo de serviço no Tribunal Regional do Trabalho: 18 anos.

Considerando que Josué tem mais de 20 anos, Eurídice tem menos de 70 anos e é mais velha do que Josué, então, com certeza, a soma de suas idades, em anos, é um número

a) maior que 100.

b) quadrado perfeito.

c) múltiplo de 11.

d) divisível por 9.

e) menor que 100.

Comentários:

Essa questão é bastante interessante por envolver conceitos do sistema de numeração decimal e o conceito de múltiplo.

Primeiramente, deve-se entender que qualquer número de 2 dígitos **XY** pode ser escrito pela soma **10X + Y**. **Exemplo**: o número **27** pode ser descrito por 10×**2** + **7**.

Voltando ao problema, veja que, se a idade de Eurídice for escrita como **AB**, onde **A** é o dígito das dezenas e **B** é o dígito das unidades, a idade de Josué deve ser escrita por **BA**.

A soma **S** das idades é dada por:

S = "**AB**" + "**BA**"

= (10A + B) + (10B + A)

= 11A + 11B

=11×(A+B)

Note que S = 11×(A+B), com (A+B) inteiro.

A soma, portanto, é um múltiplo de 11, pois S é descrito como o produto de 11 por um número inteiro.

Gabarito: Letra C.

Regras de divisibilidade

As regras de divisibilidade são "regras de bolso" que servem para ver se um determinado número é divisível por outro sem ser necessário realizar a divisão.

- **Divisibilidade por 2**: um número é divisível por 2 quando for par, isto é, quando terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

- **Divisibilidade por 3**: um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for divisível por 3.

- **Divisibilidade por 4**: um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos do número forem divisíveis por 4. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 00.

- **Divisibilidade por 5**: um número é divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5.

- **Divisibilidade por 6**: um número é divisível por 6 quando for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

- **Divisibilidade por 8**: um número é divisível por 8 quando os três últimos algarismos do número forem divisíveis por 8. Essa regra inclui o caso em que o número termina em 000.

- **Divisibilidade por 9**: um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for divisível por 9.

- **Divisibilidade por 10**: um número é divisível por 10 quando termina em 0.

- **Divisibilidade por 11**: um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos de ordem par (p) menos a soma dos algarismos de ordem ímpar (i) é um número divisível por 11. Essa regra inclui o caso particular em que $p - i = 0$, pois 0 é divisível por 11.

  Exemplo: o número 5016 é divisível por 11.
  Os algarismos de ordem par são, da direita para a esquerda, o segundo (1) e o quarto (5). A soma dos algarismos de ordem par é $p = 1 + 5 = 6$.
  Os algarismos de ordem ímpar são, da direita para a esquerda, o primeiro (6) e o terceiro (0). A soma dos algarismos de ordem ímpar é $i = 6 + 0 = 6$.
  Note que $p - i = 0$, que é divisível por 11. Logo, o número 5016 é divisível por 11.

- **Divisibilidade por 12**: um número é divisível por 12 quando for divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.

- **Divisibilidade por 15**: um número é divisível por 15 quando for divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.

(Pref. Osasco/2014) O maior número que é múltiplo de 3, é múltiplo de 4 e é menor que 200 é:

a) 190

b) 192

c) 194

d) 196

e) 198

Comentários:

A questão quer determinar o maior número menor do que 200 que é **múltiplo de 3 e de 4** simultaneamente. Em outras palavras, quer determinar o maior número menor do que 200 em que **3 e 4 são divisores** simultaneamente.

Podemos começar a testar os casos pelo maior número menor do que 200.

- **199** não é divisível por 3, pois 1 + 9 + 9 = 19 não é divisível por 3;

- **198** não é divisível por 4, pois 98 não é divisível por 4;

- **197** não é divisível por 3, pois 1 + 9 + 7 = 17 não é divisível por 3;

- **196** não é divisível por 3, pois 1 + 9 + 6 = 16 não é divisível por 3;

- **195** não é divisível por 4, pois 95 não é divisível por 4;

- **194** não é divisível por 3, pois 1+ 9 + 4 = 14 não é divisível por 3;

- **193** não é divisível por 3, pois 1+ 9 + 3 = 13 não é divisível por 3;

- **192** é divisível por 3, pois 1+ 9 + 2 = 12 é divisível por 3. Note também que 192 é divisível por 4, pois 92 é divisível por 4.

Logo, **192** é o maior número que é múltiplo de 3, é múltiplo de 4 e é menor que 200.

Gabarito: Letra B.

Números primos

Conceito de números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.

Os 15 primeiros números primos são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Como determinar se um número é primo

Para determinar se um número **N** é primo, devemos dividi-lo sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... e verificar se algum primo é divisor de **N**:

- Se **algum primo for divisor** de **N**, então **N não é primo**;
- Se, ao realizar a divisão sucessiva, **obtivermos um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo N**, então **N é primo**.

Veja que não é nada prático dividir **N** por diversos primos até obtermos um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo **N**. É justamente por isso que esse método, nas questões de concurso público, é mais utilizado para verificar se um dado número **não é primo**. Para melhor compreensão do método, vejamos a questão a seguir:

(SEE PE/2016) O número de três algarismos: n = 68D é primo.

O algarismo D, das unidades, é

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Comentários:

Note que, para **n** ser primo, **n** só pode ser divisível por 1 e por ele mesmo. Vamos testar as alternativas, **eliminando aquelas em que n não é primo**.

a) 681 é divisível por 3, pois a soma $6 + 8 + 1 = 15$ é divisível por 3. Logo, não é primo.

c) 685 é divisível por 5, pois termina em 5. Logo, não é primo.

d) 687 é divisível por 3, pois a soma $6 + 8 + 7 = 21$ é divisível por 3. Logo, não é primo.

Restaram as alternativas B e E. Vamos testar a alternativa E.

Para verificar se 689 **não é primo**, vamos tentar dividir o número **pelos primos na ordem 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...**.

- 689 não é divisível por **2**, pois não é par;
- 689 não é divisível por **3**, pois a soma dos algarismos não é divisível por 3;
- 689 não é divisível por **5**, pois não termina em 0 ou 5;
- Ao tentar dividir 689 por **7**, encontramos resto 3;
- 689 não é divisível por **11**, pois $(8) - (9 + 6) = -5$ não é divisível por 11 ;
- Ao tentar dividir 689 por **13**, encontramos resto 0. Logo, 689 não é primo, pois é divisível por 13.

Por exclusão, a **alternativa B é a correta**, ou seja **683 é primo**.

Para obter diretamente que o número 683 é primo, temos que dividir esse número **pelos primos na ordem 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.**, e verificar que nenhum desses primos é divisor de 683 **até obter um quociente menor do que o primo pelo qual estamos dividindo 683**.

Ao dividir o número 683 por **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23**, nota-se que nenhum desses primos é divisor de 683 (**a divisão sempre deixa resto**). Nessas divisões, o quociente obtido é sempre maior do que o primo pelo qual estamos dividindo 683.

Ao dividir 683 pelo **primo 29**, obtém-se **quociente 23** e resto 6. Como o quociente obtido é menor do que o primo testado, conclui-se que **683 é primo**.

Gabarito: Letra B.

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Para realizar a decomposição em fatores primos, é muito importante conhecermos as regras de divisibilidade para não perdermos tempo tentando dividir um número que não é divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.
- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.
- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3**.
- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5**.
- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.
- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.
- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1**. **Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

A decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

A decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Decomponha o número 10098 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 10098 & 2 \\ 5049 & 3 \\ 1683 & 3 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

A decomposição de 10098 em fatores primos é:

$$10098 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 11 \times 17$$

$$10098 = 2 \times 3^3 \times 11 \times 17$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:

$$500 = 5 \times 100$$

$$= 5 \ \times 10 \times 10$$

$$= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$$

$$= 2^2 \times 5^3$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompormos o número de uma forma não metodológica.

Veja a questão a seguir, que apresenta uma aplicação interessante da decomposição em fatores primos.

(MPE RJ/2016) Sejam x e y números inteiros positivos tais que $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$.

O número de pares ordenados diferentes (x, y) que podem ser formados é:

a) 16;

b) 14;

c) 12;

d) 10;

e) 8.

Comentários:

Esta questão apresenta um nível de dificuldade bastante elevado, especialmente para aqueles que nunca viram uma questão desse tipo.

Veja que a igualdade apresentada corresponde a $\boldsymbol{xy = 3 \times 16}$.

Podemos **decompor o produto xy em fatores primos**:

$$xy = 3 \times (16)$$

$$xy = 3 \times (2^4)$$

$$xy = 2^4 \times 3$$

Como x e y são números naturais que multiplicados resultam em $2^4 \times 3$, **x e y só podem ter em sua composição o primo 2 ou o primo 3**.

Note, portanto, que **o número x pode ser descrito na forma $x = 2^a \times 3^b$**, sendo que a pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4 e b pode ser 0 ou 1.

Toda vez que determinarmos a e b, teremos o x determinado e o y determinado, uma vez que x será dado por $2^a \times 3^b$ e y será dado por $2^{4-a} \times 3^{1-b}$. Veja:

$$xy = 2^4 \times 3$$

$$(2^a \times 3^b) \times y = 2^4 \times 3$$

$$y = \frac{2^4}{2^a} \times \frac{3^1}{3^b}$$

$$y = 2^{4-a} \times 3^{1-b}$$

Logo, **toda vez que determinarmos a e b, teremos o par (x, y) determinado.**

Como existem 5 possibilidades para a e 2 possibilidades para b, o total de possibilidades para se determinar x é $5 \times 2 = 10$. Esse é justamente o número de possibilidades para o par ordenado (x, y). O **gabarito** é **Letra D**.

Para fins didáticos, vamos mostrar todas as possibilidades para o par ordenado (x, y):

a	b	$x = 2^a.3^b$	$y = 2^{4-a}.3^{1-b}$	Par (x,y)	xy
0	0	1	48	(1,48)	48
1	0	2	24	(2,24)	48
2	0	4	12	(4,12)	48
3	0	8	6	(8,6)	48
4	0	16	3	(16,3)	48
0	1	3	16	(3,16)	48
1	1	6	8	(6,8)	48
2	1	12	4	(12,4)	48
3	1	24	2	(24,2)	48
4	1	48	1	(48,1)	48

Gabarito: Letra D.

Obtenção dos divisores naturais de um número

Para obter todos os divisores **naturais** de um determinado número, realizaremos um exemplo completo para melhor entendimento.

Saiba de antemão que, para obter os divisores **naturais**, é necessário seguir 3 princípios básicos:

- **O número 1 é sempre um divisor** de qualquer número e é por ele que devemos começar o método;
- Os divisores são obtidos pela **multiplicação de um fator primo por todos os divisores anteriores**;
- **Não se deve escrever mais de uma vez um divisor já obtido**, pois não é necessário.

Obtenha todos os divisores naturais de 500

Primeiramente, devemos decompor 500 em fatores primos pelo método tradicional:

500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

Em seguida, delimitamos a área dos divisores e já escrevemos o divisor 1, pois o número 1 sempre divide qualquer número sem deixar resto.

		Divisores
		1
500	2	
250	2	
125	5	
25	5	
5	5	
1		

Agora, para cada fator primo, devemos multiplicá-lo por todos os divisores

Começaremos pelo primeiro fator primo 2. Esse fator primo pode ser multiplicado pelo divisor 1. Nesse caso, obtemos o divisor 2.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	
125	5	
25	5	
5	5	
1		

Agora vamos para o segundo fator primo 2. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos: 1 e 2. Observe que **não há necessidade de registrar <u>novamente</u> o divisor 2 proveniente do produto 2×1**. Logo, vamos registrar somente o divisor 4 (2×2)

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	
25	5	
5	5	
1		

Agora vamos para o primeiro fator primo 5. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos: 1, 2 e 4. Nesse caso, obtemos 1×5 = **5**; 2×5 = **10** e 4×5 = **20**.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	5, 10, 20
25	5	
5	5	
1		

Agora vamos para o segundo fator primo 5. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos: 1, 2, 4, 5, 10 e 20. Observe, porém, que não há necessidade de multiplicar o segundo fator 5 por 1, 2 e 4, pois nesses casos obteríamos divisores que já temos. Logo, vamos multiplicar o segundo fator 5 somente por 5, 10 e 20.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	5, 10, 20
25	5	25, 50, 100
5	5	
1		

Por fim, vamos ao terceiro fator primo 5. Esse fator primo pode ser multiplicado por todos os divisores já obtidos. Observe, porém, que só há necessidade de multiplicar esse fator 5 pelos divisores 25, 50 e 100, pois a multiplicação pelos outros divisores (1, 2, 4, 5, 10, 20) nos retornaria divisores já obtidos.

		Divisores
		1
500	2	2
250	2	4
125	5	5, 10, 20
25	5	25, 50, 100
5	5	125, 250, 500
1		

Logo, temos os seguintes divisores de 500:

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250 \text{ e } 500$$

Agora que desenvolvemos o método completo, vamos praticar a obtenção dos divisores. **Tente fazer sozinho antes de consultar a resolução**.

Obtenha todos os divisores <u>naturais</u> de 282

		Divisores
		1
282	2	2
141	3	3, 6
47	47	47, 94, 141, 282
1		

Logo, temos os seguintes divisores de 282:

$$1, 2, 3, 6, 47, 94, 141, 282$$

Obtenha todos os divisores <u>naturais</u> de 2900

		Divisores
		1
2900	2	2
1450	2	4
725	5	5, 10, 20
145	5	25, 50, 100
29	29	29, 58, 116, 145, 290, 580, 725, 1450, 2900
1		

Logo, temos os seguintes divisores de 2900:

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 29, 50, 58, 100, 116, 145, 290, 580, 725, 1450, 2900$$

Quantidade de divisores naturais de um número

Para saber a quantidade de divisores **naturais** de um número qualquer, não é necessário obter todos os divisores. Basta decompor o número em fatores primos e, em seguida:

- Obter todos os expoentes dos fatores primos;
- Somar 1 a cada um desses expoentes e realizar o produto dos números obtidos.

Obtenha a quantidade de divisores naturais de 500

A decomposição em fatores primos de 500 corresponde a $2^{2} \times 5^{3}$.

Os expoentes são **2** e **3**.

A quantidade de divisores de 500 é $(2+1) \times (3+1) = 3 \times 4 = 12$.

Obtenha a quantidade de divisores naturais de 2900

A decomposição em fatores primos de 2900 corresponde a $2^{2} \times 5^{2} \times 29^{1}$.

Os expoentes são **2**, **2** e **1**.

A quantidade de divisores de 2900 é $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$.

Veja como isso pode ser cobrado.

(Pref. Recife/2019) O número de divisores inteiros positivos de 600 é

a) 25.

b) 23.

c) 22.

d) 21.

e) 24.

Comentários:

Perceba que não precisamos saber todos os divisores de 600 para determinar a quantidade de divisores.

Vamos fatorar 600.

$$600 = 6 \times 100$$
$$= (2 \times 3) \times (10 \times 10)$$
$$= 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$
$$= 2^{3} \times 3^{1} \times 5^{2}$$

Os expoentes são **3**, **1** e **2**.

A quantidade de divisores de 600 é $(3+1) \times (1+1) \times (2+1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$.

Gabarito: Letra E.

Algumas bancas costumam "pegar pesado" em problemas que envolvem quantidade de divisores. Para você não ficar despreparado para estas questões difíceis, os elaboramos um bizu fortíssimo.

Se um número apresenta uma quantidade $\boldsymbol{p}$ de divisores naturais, com $\boldsymbol{p}$ primo, então esse número é da forma $\boldsymbol{q^{p-1}}$, sendo $\boldsymbol{q}$ também um número primo.

Vamos mostrar como chegamos nesse resultado.

Considere um número **N** que tenha uma quantidade **p** de divisores, com **p** primo.

Ao decompormos **N** em fatores primos, vamos supor que tenhamos obtido a seguinte fatoração, com $q_1, q_2, \dots q_n$ os primos obtidos e $e_1, e_2, \dots, e_n$ seus expoentes, que devem ser maiores ou iguais a 1.

$$N = q_1^{e_1} \times q_2^{e_2} \times \dots \times q_n^{e_n}$$

Obtida essa fatoração genérica, o número de divisores, que deve ser igual a p, é representado por:

$$(e_1 + 1) \times (e_2 + 1) \times \dots \times (e_n + 1) = p$$

Note que na esquerda da equação temos o produto de números naturais da forma $(e_i + 1)$, que devem ser maiores ou iguais a 2, e na direita temos um número primo p. Veja que **não podemos decompor esse número primo p em um produto de números inteiros maiores do que 2**. Isso significa que necessariamente temos apenas um fator $(e_i + 1)$. Nossa igualdade fica:

$$(e_1 + 1) = p$$

Note que, como temos apenas um fator $(e_i + 1)$, a decomposição do nosso número X apresenta apenas um número primo q_1 com seu expoente e_1. Além disso, e_1 é dado por:

$$(e_1 + 1) = p$$

$$e_1 = p - 1$$

Assim, nosso número com p divisores pode ser descrito como $N = q^{p-1}$.

Veja como isso pode ser cobrado em questões de concurso público.

(SABESP/2018) Dois números naturais menores que 10 tem três e apenas três divisores. Dentre os números naturais maiores que 10 e menores que 30 há outro número com três e apenas três divisores e mais um com cinco e apenas cinco divisores. A soma desses quatro números naturais é

a) 35

b) 48

c) 69

d) 42

e) 54

Comentários:

Esta era para ser muito difícil. Com o bizu que acabamos de apresentar, fica um pouco mais tranquila.

—"*Dois números naturais menores que 10 tem três e apenas três divisores*".

Veja que esses dois números naturais apresentam um **número primo de divisores**, **dado por 3**. Logo, eles podem ser escritos da forma $q^{3-1} = q^2$, com q primo. Para serem menores do que dez, eles devem ser $2^2 = \mathbf{4}$ e $3^2 = \mathbf{9}$.

— "*Dentre os números naturais maiores que 10 e menores que 30 há outro número com três e apenas três divisores e mais um com cinco e apenas cinco divisores*."

Um número apresenta **3 divisores**. Como já vimos, esse número pode ser escrito como q^2. Para esse número ficar entre 10 e 30, devemos ter $5^2 = \mathbf{25}$. Perceba que o quadrado do próximo primo, 7^2, ultrapassa 30.

O outro número apresenta **5 divisores**. Como 5 é primo, esse número pode ser escrito como $q^{5-1} = q^4$, com q primo. Para esse número ficar entre 10 e 30, devemos ter $2^4 = \mathbf{16}$. Perceba que o próximo primo elevado ao expoente 4, 3^4, ultrapassa 30.

Os quatro números obtidos são **4**, **9**, **25** e **16**. A soma é dada por:

$$4 + 9 + 25 + 16 = 54$$

Gabarito: Letra E.

Divisores inteiros de um número

Até agora, tratamos dos divisores **naturais** de um número. O que aconteceria se quiséssemos os divisores **inteiros** do número?

Os divisores **inteiros** do número são os divisores inteiros **positivos e negativos**. Já sabemos como obter os divisores inteiros positivos: são os divisores naturais. Os divisores inteiros negativos são os positivos com sinal trocado.

Vejamos um exemplo:

Obtenha os divisores inteiros de 282

		Divisores
		1
282	2	2
141	3	3, 6
47	47	47, 94, 141, 282
1		

Os divisores **inteiros positivos** (**naturais**) são $1, 2, 3, 6, 47, 94, 141, 282$.

Logo, os **divisores inteiros** (**positivos** e **negativos**) são:

$$-1, -2, -3, -6, -47, -94, -141, -282, 1, 2, 3, 6, 47, 94, 141, 282.$$

Note que o número de divisores **inteiros** é sempre o dobro do número de divisores **naturais**.

(SEDUC AM/2014) Sendo $y = \frac{48}{x+5}$, o número de valores inteiros de x, para os quais o valor de y também é inteiro, é:

a) 12.

b) 15.

c) 16.

d) 20.

e) 24.

Comentários:

Primeiramente, observe que para $\frac{48}{x+5}$ ser inteiro, $x + 5$ deve ser divisor inteiro de 48.

Vamos obter **quantos** divisores **inteiros** de 48 temos. Para tanto, vamos fatorar 48.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $48 = 2^{\mathbf{4}} \times 3^{\mathbf{1}}$.

Temos um total de $(\mathbf{4} + 1) \times (\mathbf{1} + 1) = \mathbf{10}$ **divisores naturais**. Como o número de divisores inteiros é sempre o dobro do número de divisores naturais, **temos 20 divisores inteiros**.

Uma vez que temos 20 divisores inteiros para o número 48, temos <u>20 valores inteiros para $x + 5$</u> que farão com que a divisão $\frac{48}{x+5}$ seja inteira.

Isso significa que temos <u>20 valores para x</u> que, somados com 5, farão com que a divisão $\frac{48}{x+5}$ seja inteira.

Gabarito: Letra D.

MMC E MDC

MMC e MDC
Mínimo múltiplo comum (MMC)
Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo: • Decompor todos os números em fatores primos; • Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto. Existe um método prático para determinar o **MMC** entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**. Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado. • Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$, podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC. • Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.
Máximo divisor comum (MDC)
Para obter o **MDC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo: • Decompor todos os números em fatores primos; • Selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto. • Quando temos que realizar um **MDC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é divisor** de $\boldsymbol{b}$, podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MDC. • Se tivermos **N** números e um deles é **divisor de todos os outros**, esse número é o **MDC**.
MMC ou MDC: qual usar?
• Se o resultado procurado deve ser **maior** do que os **dados do problema**, use o **MMC**; • Se o resultado deve ser **menor** do que os **dados**, use o **MDC**. **A relação é inversa**: • **Resultado MAIOR**, **use o MÍNIMO Múltiplo Comum**; • **Resultado MENOR**, **use o MÁXIMO Divisor Comum**. O melhor caminho para acertar as questões é sempre tentar responder à seguinte pergunta: *Preciso encontrar o **menor múltiplo** dos **números em questão** ou o **maior divisor** desses números?*

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo** **Múltiplo** **Comum** (**MMC**) entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ por $\text{MMC}\ (a; b; c)$.

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 380, 520 e 550

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$380 = 38 \times 10$$
$$= (2 \times 19) \times (2 \times 5)$$
$$= \mathbf{2^2 \times 5 \times 19}$$

$$520 = 52 \times 10$$
$$= (2 \times 26) \times (2 \times 5)$$
$$= 2 \times 2 \times 13 \times 2 \times 5$$
$$= \mathbf{2^3 \times 5 \times 13}$$

$$550 = 55 \times 10$$
$$= (11 \times 5) \times (2 \times 5)$$
$$= \mathbf{2 \times 5^2 \times 11}$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$380 = 2^2 \times 5 \qquad\qquad \times 19$

$520 = 2^3 \times 5 \qquad \times 13$

$550 = 2 \ \times 5^2 \times 11$

Logo, $\text{MMC}\ (380; 520; 550) = 2^3 \times 5^2 \times 11 \times 13 \times 19 = 543.400.$

Calcule o MMC entre 3960 10098.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10098 & 2 \\ 5049 & 3 \\ 1683 & 3 \\ 561 & 3 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$

$10098 = 2 \times 3^3 \times 11 \times 17$

Logo, $\text{MMC}\ (3960; 10098) = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 11 \times 17 = 201.960.$

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2^2 \times 5$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 2 \times 5^2$$

Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = 5$

$10 = 2 \times 5$

$15 = 3 \times 5$

$20 = 2^2 \times 5$

$50 = 2 \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300.$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$21 = \quad 3 \quad \times 7$

$45 = \quad 3^2 \times 5$

$50 = 2 \quad \times 5^2$

Logo, $\text{MMC}\ (21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150.$

Existe um método prático para determinar o **MMC** entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números **5**, **10**, **15**, **20** e **50** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **10** e **25**.

- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **10** e **25** **por 2**, obtemos **5**, **5**, **15**, **5** e **25**.

- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **15**, **5** e **25** é divisível por 2. **Passemos ao 3**.

- Ao dividir os números **5**, **5**, **15**, **5** e **25** **por 3**, obtemos **5**, **5**, **5**, **5** e **25**.

- Note que nenhum dos números dentre **5**, **5**, **5**, **5** e **25** é divisível por 3. **Passemos ao 5**.

- Ao dividir os números **5**, **5**, **5**, **5** e **25** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **5**.

- Ao dividir os números **1**, **1**, **1**, **1** e **5** **por 5**, obtemos **1**, **1**, **1**, **1** e **1**. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5, & 10, & 15, & 20, & 50 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 10, & 25 & 2 \\ 5, & 5, & 15, & 5, & 25 & 3 \\ 5, & 5, & 5, & 5, & 25 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$\begin{aligned} \text{MMC}\ (5; 10; 15; 20; 50) &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \\ &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$
\begin{array}{r|l}
21,\ 45,\ 50 & 2 \\
21,\ 45,\ 25 & 3 \\
7,\ 15,\ 25 & 3 \\
7,\ 5,\ 25 & 5 \\
7,\ 1,\ 5 & 5 \\
7,\ 1,\ 1 & 7 \\
1,\ 1,\ 1 &
\end{array}
$$

O **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) é o seguinte produto:

$$
\begin{aligned}
\text{MMC}\ (21; 45; 50) &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\
&= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \\
&= 3150
\end{aligned}
$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é múltiplo** de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar $\boldsymbol{b}$ do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:

Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o $\text{MMC}(40; 30; 15)$, perceba que **30** é **múltiplo de 15.** Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}\ (40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o $\text{MMC}(390; 130; 75)$, perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}\ (\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, **esse número é o MMC**.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}\ (3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

$$\text{MMC}\ (120; 60; 15) = 120$$

Vamos ver como o MMC pode ser cobrado em problemas.

(AVAREPREV/2020) Dois relógios foram programados para despertar em intervalos de tempo constantes: um deles desperta 3 vezes ao dia, e o outro, 4 vezes ao dia. Suponha que em determinado horário x, de um dia qualquer, ambos os relógios despertaram, ao mesmo tempo, e funcionaram corretamente, durante as 50 horas seguintes. Nessas condições, iniciando-se a contagem nesse horário x, e encerrando-a 50 horas após, o número total de vezes em que esses dois relógios teriam despertado, em um mesmo horário, será igual a

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 7.

Comentários:

O relógio que desperta 3 vezes ao dia desperta a cada $\frac{24h}{3} = 8$ horas, e o relógio que desperta 4 vezes ao dia desperta a cada $\frac{24h}{4} = 6$ horas.

A questão pede o número total de vezes em que esses dois relógios teriam despertado, em um mesmo horário, em um intervalo de 50 horas. Para isso, precisamos saber a cada quantas horas os dois relógios despertam juntos. Trata-se do **MMC** entre 8h e 6h.

Vamos decompor 8 e 6 em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto

$8 = 2^3$

$6 = 2 \times 3$

Logo, $\text{MMC}(8; 6) = 2^3 \times 3 = 24.$

Como os relógios despertam simultaneamente a cada 24h, em um intervalo de 50h eles despertam juntos 3 vezes: no início das 50h, após 24h e após 48h.

Gabarito: Letra A.

(AFAP/2019) João e Maria correm todos os dias no circuito de 1.500 m de um parque. João faz o percurso em 8 minutos e Maria em 10 minutos. Se eles partem juntos do ponto inicial do percurso, a diferença entre o número de metros percorridos por João e o número de metros percorridos por Maria, quando se encontrarem novamente no ponto de partida, supondo que mantenham o mesmo ritmo durante todo o exercício, é

a) 7.500.

b) 5.500.

c) 3.000.

d) 2.500.

e) 1.500.

Comentários:

Note que, para João e Maria se encontrarem novamente no ponto de partida, é necessário que tenha decorrido um tempo determinado que seja múltiplo tanto de 8 minutos quanto de 10 minutos.

Como a questão pede o próximo encontro, devemos encontrar o menor múltiplo comum entre 8 e 10. Trata-se do $\text{MMC}\ (8; 10)$.

Vamos decompor os 2 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$8 = 2^3$

$10 = 2 \times 5$

Logo, $\text{MMC}(8; 10) = 2^3 \times 5 = 40$. Portanto, o novo encontro ocorrerá em 40 minutos.

Nesse tempo, João terá dado $\frac{40}{8}$ = 5 voltas e Maria terá dado $\frac{40}{10} = 4$ voltas. A diferença de número de metros percorridos entre João e Maria corresponde a $5 - 4 = 1$ volta, ou seja, 1.500m.

Gabarito: Letra E.

(SEFAZ AM/2022) Um pote contém entre 150 e 200 balas. Miguel reparou que separando essas balas em grupos de 5 sobravam 2 balas, e que, separando em grupos de 7, sobravam também 2 balas.

Se Miguel separasse as balas em grupos de 9 balas, sobrariam

a) 0.

b) 2.

c) 4.

d) 6.

e) 8.

Comentários:

Considere que o número de balas é x. Sabemos que **x está entre 150 e 200**.

Além disso, perceba que ao dividir x por 5 ou por 7, sempre temos **resto 2**. Isso significa que, ao dividir **(x−2)** por 5 ou por 7, sempre temos **resto zero**. Em outras palavras, **(x−2) é múltiplo comum a 5 e 7**.

Note que o **mínimo múltiplo comum a 5 e 7** é o produto 5×7 = **35**, pois 5 e 7 são primos.

Logo, os candidatos para **(x−2) são os múltiplos de 35**, pois **os múltiplos de 35 são os múltiplos comuns a 5 e 7**, sendo **35** o menor múltiplo comum a 5 e 7.

Como x está entre 150 e 200, **(x−2)**, que é múltiplo de 35, **está entre 148 e 198**. Vamos testar alguns múltiplos de 35:

$$35 \times 4 = 140$$

$$35 \times 5 = 175$$

$$35 \times 6 = 210$$

Veja que **o único múltiplo de 35 que está entre 148 e 198** é **175**. Logo:

$$x - 2 = 175$$

$$x = 177$$

Assim, o número de balas é 177. Ao dividir 177 por 9, obtemos **quociente 19** e **resto 6**. Portanto, se Miguel separasse as 177 balas em **grupos de 9 balas**, **sobrariam 6 balas**.

Gabarito: Letra D.

Máximo Divisor Comum (MDC)

O **Máximo** **Divisor** **Comum** (**MDC**) entre **N** números é o **maior** dos **divisores** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MDC** entre os números $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ por $\text{MDC}\ (\text{a}; \text{b}; \text{c})$.

Para obter o MDC entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos;
- Selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes.**

Máximo Divisor Comum (MDC)

Selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes**

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MDC entre 20, 50 e 65

Vamos decompor os números em fatores primos:

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$\mathbf{= 2^2 \times 5}$$

$$50 = 5 \times 10$$
$$= 5 \ \times 2 \times 5$$
$$\mathbf{= 2 \times 5^2}$$

$$65 = 5 \times 13$$

Devemos selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$20 = 2^2 \times 5$

$50 = 2 \ \times 5^2$

$65 = \qquad 5 \ \times 13$

Veja que o único primo comum é o 5 e o seu expoente é 1.

Logo, $\mathrm{MDC}(20; 50; 65) = 5$.

Calcule o MDC entre 3960 10098.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

3960	2
1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

10098	2
5049	3
1683	3
561	3
187	11
17	17
1	

Devemos selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$3960 = \quad 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$

$10098 = 2 \ \times 3^3 \qquad \times 11 \ \times 17$

Logo, $\mathrm{MDC}(3960; 10098) = 2 \times 3^2 \times 11 = 198.$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MDC** de **N** números e no meio desses números temos que $\boldsymbol{a}$ **é divisor** de $\boldsymbol{b}$**,** podemos eliminar **b** do cálculo do MDC.

Calcule o MDC de 60, 45 e 30

Ao calcular o $\mathrm{MDC}(60; 45; 15)$, perceba que **30** é **divisor de 60**. Logo:

$$\mathrm{MDC}(\mathbf{60}; 45; \mathbf{30}) = \mathrm{MDC}(45; \mathbf{30})$$

Calcular o MDC de 45 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MDC de 580, 290 e 85

Ao calcular o $\mathrm{MDC}(580; 290; 85)$, perceba que **290** é **divisor de 580**. Logo:

$$\mathrm{MDC}(\mathbf{580}; \mathbf{290}; 85) = \mathrm{MDC}(\mathbf{290}; 85)$$

Calcular o MDC de 290 e 85 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é divisor de todos os outros**, **esse número é o MDC**.

Calcule o MDC de 90, 30 e 10

Perceba que 10 é divisor de 90 e 30. Logo:

$$\text{MDC}(90; 30; 10) = 10$$

Calcule o MDC de 110, 88 e 22

Perceba que 22 é divisor de 110 e 88. Logo:

$$\text{MDC}(110; 88; 22) = 22$$

Vamos praticar com alguns problemas de MDC.

(Pref. Morro Agudo/2020) Tem-se 144 cm de fita na cor vermelha e 168 cm de fita na cor verde. Pretende-se cortar essas fitas em pedaços, todos com o mesmo comprimento, sendo este o maior possível, de modo a utilizar totalmente essas fitas, sem desperdiçá-las. Nesse caso, o número total de pedaços de fitas que será possível obter é

a) 12.

b) 13.

c) 16.

d) 24.

e) 26.

Comentários:

Veja que, para obter o maior pedaço possível, esse pedaço deve ter um comprimento tal que, ao dividir 144 e 168, nos deixa resto zero. Logo, estamos diante da necessidade de encontrar um divisor comum a 144 e 168 que seja o maior possível. Trata-se do $\text{MDC}(144; 168)$.

Vamos fatorar 144.

$$144 = 12 \times 12$$
$$= (3 \times 4) \times (3 \times 4)$$
$$= 2^4 \times 3^2$$

Vamos fatorar 168.

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Devemos selecionar os números primos comuns com os menores expoentes e realizar o produto.

$144 = 2^4 \times 3^2$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

Logo, $\text{MDC}(144; 168) = 2^3 \times 3 = 24$.

Sabemos agora que o pedaço deve ter 24cm.

O número de pedaços vermelhos é $\frac{144cm}{24cm} = 6$ e o número de pedaços verdes é $\frac{168cm}{24cm} = 7$. Logo, temos um total de $6 + 7 = 13$ pedaços.

Gabarito: Letra B.

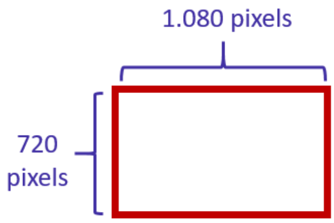
(SEDF/2017) Julgue o item a seguir, relativo a números naturais, números racionais e regra de três.

Situação hipotética: Na veiculação de determinado anúncio publicitário em aparelhos de TV digital de resolução igual a 1.080 pixels × 720 pixels, a tela aparece dividida em quadrados, todos de mesma área.

Assertiva: Nesse caso, a menor quantidade de quadrados possível é igual a 6.

Comentários:

A tela apresenta 1.080 pixels de comprimento e 720 pixels de largura.



Se o quadrado apresentar um comprimento e uma largura de **L** pixels, esse valor **L** deve ser um divisor tanto do comprimento de 1.080 pixels quanto da largura 720 pixels.

Note que, para obtermos a menor quantidade de quadrados, devemos ter o maior tamanho para **L**, pois quanto maior o tamanho do quadrado, menos quadrados precisaremos para preencher a tela.

Como **L** deve ser um divisor comum de 1.080 e 720 e deve ser o maior possível, $L = MDC\ (1.080;\ 720)$.

Primeiramente, devemos decompor os números em fatores primos.

$$1080 = 10 \times 108$$
$$= 10 \times 9 \times 12$$
$$= (2 \times 5) \times 3^2 \times (3 \times 2^2)$$
$$= 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$720 = 72 \times 10$$
$$= (9 \times 8) \times (2 \times 5)$$
$$= 3^2 \times 2^3 \times 2 \times 5$$

$$= 2^4 \times 3^2 \times 5$$

Agora devemos selecionar os números primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

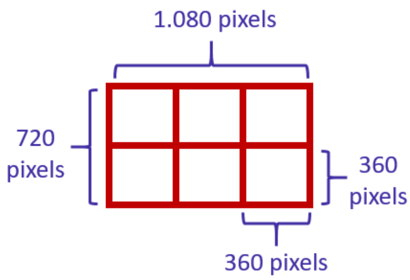
$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

Logo, $\text{MDC}(1080; 720) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.

Portanto, lado **L** do quadrado tem 360 pixels.

Nesse caso, o comprimento da tela apresenta $\frac{1080}{360} = 3$ quadrados e a largura da tela apresenta $\frac{720}{360} = 2$ quadrados.



Gabarito: CERTO.

MMC ou MDC: qual usar?

Muitos alunos apresentam certa dificuldade em identificar, em um dado problema, se deve ser utilizado o **Mínimo Múltiplo Comum** (**MMC**) ou o **Máximo Divisor Comum** (**MDC**) para os **números apresentados no enunciado**.

Primeiramente, deve-se entender que o **MMC** é um **múltiplo** dos **números em questão**. Logo, o **MMC** é necessariamente **maior do que todos os números**.

Por outro lado, o **MDC** é um **divisor** dos números em questão. Portanto, o **MDC** é necessariamente **menor do que todos os números**.

Em resumo:

$$\textbf{MMC} > \text{todos os números em questão} > \textbf{MDC}$$

Assim, se você estiver em um problema sem saber se deve usar o **MMC** ou o **MDC**, utilize a seguinte dica:

- Se o resultado procurado deve ser **maior** do que os **dados do problema**, use o **MMC**.
- Se o resultado deve ser **menor** do que os **dados**, use o **MDC**.

Note que a relação em questão é inversa!

- **Resultado MAIOR**, **use o MÍNIMO Múltiplo Comum**;
- **Resultado MENOR**, **use o MÁXIMO Divisor Comum**.

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1: Um segurança faz sua ronda a cada 30 minutos, e outro segurança faz sua ronda a cada 40 minutos. Os dois seguranças iniciaram suas rondas agora. Daqui a quanto tempo eles farão a próxima ronda juntos?

Note que o tempo procurado será **maior** **do que os intervalos do enunciado**. Logo, deve-se usar o **MMC**.

Exemplo 2: Em uma sala com 40 homens e 24 mulheres, é necessário montar grupos contendo a mesma quantidade de pessoas e que tenham apenas homens ou apenas mulheres, de modo que tenhamos o número máximo de pessoas em cada grupo. Qual é o número de pessoas de cada grupo formado?

Note que a quantidade procurada de pessoas em cada grupo será **menor** **do que os dados do enunciado**. Logo, deve-se usar o **MDC**.

Apresentada a dica, ressalto que o melhor caminho para acertar as questões é sempre tentar responder à seguinte pergunta:

*Preciso encontrar o **menor múltiplo** **dos números em questão** ou o **maior divisor** **desses números**?*

Veja que, para responder a pergunta, é necessário ter muito claro os conceitos de **múltiplo** e de **divisor** aprendidos na presente aula.

Naturalmente, se você está atrás do **menor múltiplo** **dos números em questão**, você deve calcular o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)**. Caso contrário, se você está atrás do **maior divisor** **desses números**, você deve calcular o **Máximo Divisor Comum (MDC)**.

Vamos verificar novamente os dois exemplos vistos com base nesse entendimento.

Exemplo 1: Um segurança faz sua ronda a cada 30 minutos, e outro segurança faz sua ronda a cada 40 minutos. Os dois seguranças iniciaram suas rondas agora. Daqui a quanto tempo eles farão a próxima ronda juntos?

Note que o tempo procurado será **múltiplo** **de 30 e de 40**. Como se quer a próxima ronda, esse múltiplo procurado deve ser o **menor possível**. Logo, deve-se usar o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)**.

Exemplo 2: Em uma sala com 40 homens e 24 mulheres, é necessário montar grupos contendo a mesma quantidade de pessoas e que tenham apenas homens ou apenas mulheres, de modo que tenhamos o número máximo de pessoas em cada grupo. Qual é o número de pessoas de cada grupo formado?

Note que a quantidade procurada de pessoas em cada grupo será **divisor** **dos números 40 e 24**. Além disso, esse divisor deve ser o **maior possível**, pois quer-se o número máximo de pessoas em cada grupo. Logo, deve-se usar o **Máximo Divisor Comum (MDC)**.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

Múltiplos e Divisores

1.(CESPE/SERPRO/2021) Suponha que sejam gerados 5 números válidos de CPF para serem atribuídos a 5 indivíduos distintos. Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

Suponha que a seja o último dígito de um dos CPFs gerados, que b seja o último dígito de outro desses CPFs e que a e b sejam números ímpares consecutivos. Nessa situação, a + b é múltiplo de 4.

Comentários:

Para resolver o problema, devemos saber que todo **número ímpar** pode ser escrito da forma $2\boldsymbol{k}+1$, sendo $\boldsymbol{k}$ um número inteiro. Por exemplo:

- O número 5 pode ser escrito como $2\times\mathbf{2}+1$;
- O número 7 pode ser escrito como $2\times\mathbf{3}+1$;
- O número 9 pode ser escrito como $2\times\mathbf{4}+1$;
- Etc.

E o que é um **ímpar consecutivo** de um número? É o próximo número ímpar maior do que esse determinado número. Por exemplo, o ímpar consecutivo do número 11 é o 13.

Voltando ao problema, note que, como a é um **número ímpar**, ele pode ser escrito da forma $2k+1$, sendo k um número inteiro.

Além disso, b é um **ímpar consecutivo** de a. Logo, ele pode ser escrito como $a+2$.

Devemos verificar se $a+b$ é múltiplo de 4. Temos que:

$$a+b$$

$$=a+(a+2)$$

$$=2a+2$$

$$=2\times(2k+1)+2$$

$$=4k+2+2$$

$$=4k+4$$

$$=4\times(k+1)$$

Note que $a+b$ é igual a $4\times\boldsymbol{(k+1)}$, sendo $\boldsymbol{(k+1)}$ um **número inteiro**.

A soma $a + b$, portanto, é um múltiplo de 4, pois $a + b$ é descrita como o produto do número 4 por um número inteiro.

Gabarito: CERTO.

2. (CESPE/PC DF/2021) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada.

Um foragido da justiça, que gostava de se exibir perante seus comparsas e conhecia um pouco de matemática, ligou para a polícia e passou as seguintes informações: "em 30 minutos, eu estarei na rua Alfa, em uma casa, do lado direito da rua, cujo número tem as seguintes características: é inferior a 1.000, o algarismo das centenas é igual ao número de diagonais de um retângulo e, além disso, a parte do número formada só pelos algarismos das dezenas e das unidades é múltiplo de 7". Uma viatura foi deslocada para o intervalo de casas da rua Alfa correspondente ao algarismo das centenas revelado. Lá chegando, os policiais verificaram que, nesse trecho da rua Alfa, os números das casas tinham as seguintes características: os algarismos das dezenas e das unidades começavam de 01 e de uma casa para a próxima eram acrescentadas 8 unidades. Nessa situação, o número da casa informado pelo foragido é inferior a 250.

Comentários:

Observe que o número deve ser menor do que 1000 e o algarismo das centenas é igual ao número de diagonais do retângulo. Como o retângulo tem duas diagonais, o número é da seguinte forma:

$$2\,\_\,\_$$

A parte do número formada só pelos algarismos das dezenas e das unidades é múltiplo de 7:

$$2\underbrace{\_\,\_}_{\substack{\text{Múltiplo}\\ \text{de 7}}}$$

Note que o número das casas começava em 201 e a casas subsequentes apresentavam a numeração anterior acrescida de 8 unidades. Temos, portanto, as seguintes numerações:

$$201, 209, 2017, 255, 233, 241, \mathbf{249}, 257, \ldots$$

Observe, portanto, que **249 é o número procurado**, pois **49 é múltiplo de 7**. Logo, o número da casa informado pelo foragido é inferior a 250.

Gabarito: CERTO.

3. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

A quantidade de números inteiros múltiplos de 19 que estão entre 1.234 e 4.321 é inferior a 160.

Comentários:

Para encontrar o **número de múltiplos de 19** entre **1.234** e **4.321**, vamos realizar a seguinte operação:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente}\\ \text{inferior a 4.321}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente}\\ \text{superior a 1.234}\end{pmatrix}}{19}+\mathbf{1}$$

Observe que **é necessário somar uma unidade** na expressão para não deixar de fora um dos extremos.

Exemplo: **quantos múltiplos de 19 existem entre 19 e 38**? Ora, claramente existem dois: o próprio 19 e o próprio 38. Ocorre que, ao realizar $\frac{38-19}{19}$, obteríamos 1 como resultado. Logo, é necessário somar uma unidade na expressão:

$$\frac{38-19}{19}+1=2$$

Voltando ao problema, vamos agora obter o **múltiplo de 19 imediatamente inferior a 4.321.** Note que **4.321** dividido por 19 nos deixa **quociente 227** e resto 8. Logo, o **múltiplo de 19 imediatamente inferior a 4.321** é:

$$227 \times 19 = 4.313$$

Vamos agora obter o **múltiplo de 19 imediatamente superior a 1.234**. Note que **1.234** dividido por 19 nos traz quociente 64 e **resto 18**. Logo, para não deixar resto na divisão, devemos somar uma unidade ao número. Portanto, o **múltiplo de 19 imediatamente superior a 1.234** é:

$$1.234 + 1 = 1.235$$

Portanto, o **número de múltiplos de 19** entre **1.234** e **4.321** é:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente}\\ \text{inferior a 4.321}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Múltiplo de 19 imediatamente}\\ \text{superior a 1.234}\end{pmatrix}}{19}+\mathbf{1}$$

$$\frac{4.313-1.235}{19}+1$$

$$162+1$$

$$= 163$$

Logo, quantidade de números inteiros múltiplos de 19 que estão entre 1.234 e 4.321 é **superior a 160**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

4. (CESPE/SEFAZ RS/2018) Uma assistente administrativa rasgou em n pedaços uma folha de papel que continha informação considerada sigilosa. Como ainda era possível ler alguma informação em um desses pedaços, ela rasgou-o também em n pedaços. Receosa de que a informação sigilosa pudesse ser recuperada de um desses últimos pedaços, rasgou-o também em n pedaços.

Assinale a opção que indica uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada.

a) 15

b) 26

c) 28

d) 30

e) 36

Comentários:

Vamos entender passo a passo cada linha do problema.

"Uma assistente administrativa rasgou em n pedaços uma folha de papel que continha informação considerada sigilosa"

Observe que o valor de **n é inteiro**, pois a assistente administrativa não pode ter rasgado a folha de papel em "5,5 pedaços" ou "10,8 pedaços", por exemplo.

"Como ainda era possível ler alguma informação em um desses pedaços, ela rasgou-o também em n pedaços."

Note que, anteriormente, tínhamos n pedaços. **Um único** desses n pedaços foi rasgado novamente, e outros $n-1$ pedaços permaneceram como estavam. Logo, ficamos com:

- $n-1$ pedaços que permaneceram como estavam;
- n pedaços provenientes desse único pedaço original que foi rasgado em n partes.

Observe que, **nesse momento**, o **total de pedaços** é

$$(n-1)+n=\mathbf{2n-1}$$

"Receosa de que a informação sigilosa pudesse ser recuperada de um desses últimos pedaços, rasgou-o também em n pedaços."

Note que, no passo anterior, **tínhamos $(\mathbf{2n-1})$** pedaços. **Um único** desses $(2n-1)$ pedaços foi rasgado novamente. Os outros $(2n-1)-1$ pedaços permaneceram como estavam. Logo, ficamos com:

- $(2n-1)-1$ pedaços que permaneceram como estavam;
- n pedaços provenientes desse único pedaço que, nesse novo passo, foi rasgado em n partes.

Observe que, nesse momento, o **total de pedaços** é

$$(2n-1)-1+n$$

$$=\mathbf{3n-2}$$

A questão pergunta por **uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada**, isto é, uma quantidade que possa ser escrita como $\mathbf{3n-2}$, **sendo $\boldsymbol{n}$ um número inteiro**. Suponha que essa quantidade seja x. Nesse caso:

$$x=3n-2$$

$$x+2=3n$$

$$\boldsymbol{n=\frac{x+2}{3}}$$

Observe, portanto, que **se a quantidade $\boldsymbol{x}$ é o número de pedaços em que a folha foi rasgada, $\boldsymbol{x+2}$ deve ser múltiplo de 3 para que $\boldsymbol{n}=\frac{x+2}{3}$ seja um número inteiro**.

Logo, **devemos assinalar a alternativa em que, ao somar 2, obtemos um múltiplo de 3.**

a) 15. **ERRADO.**

$$x+2=15+2=17$$

→ **$\boldsymbol{x+2}$ não é múltiplo de 3.**

b) 26. **ERRADO.**

$$x+2=26+2=28$$

→ **$\boldsymbol{x+2}$ não é múltiplo de 3.**

c) 28. **CERTO.**

$$x + 2 = 28 + 2 = 30$$

→ $x + 2$ é múltiplo de 3.

Logo, $x = 28$ é uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada

d) 30. **ERRADO.**

$$x + 2 = 30 + 2 = 32$$

→ $x + 2$ não é múltiplo de 3.

e) 36. **ERRADO.**

$$x + 2 = 36 + 2 = 28$$

→ $x + 2$ não é múltiplo de 3.

Gabarito: Letra C.

5. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Sempre que trabalharem de segunda-feira a sexta-feira, os três servidores catalogarão uma quantidade de livros que será um número múltiplo de 12.

Comentários:

Note que, **todos os dias**, independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, **João cataloga 5/12 dos livros**.

Suponha que **em um dia qualquer temos l livros para serem catalogados**. Isso significa que **João cataloga**:

$$\frac{5}{12}\ \textbf{dos}\ (\text{livros do dia})$$

$$= \frac{5}{12} \times l$$

$$= \frac{\mathbf{5 \times l}}{\mathbf{12}}$$

Observe, portanto, que se **nesse dia qualquer** foram catalogados l livros, **l deve ser múltiplo de 12** para que o número de livros catalogados por João seja um número inteiro.

Isso significa que, **todos os dias**, **o número de livros catalogados pelos servidores será múltiplo de 12**.

Como em todos os dias deve ser catalogada uma quantidade múltipla de 12, **o total de livros catalogados pelos três servidores de segunda-feira a sexta-feira será também múltiplo de 12**.

O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

*Mas professor, a gente sabe que **todos os dias** é catalogada uma quantidade múltipla de 12. Por que a soma dos livros catalogados nos 5 dias da semana também será múltipla de 12?*

Excelente pergunta, caro aluno!

Perceba que, se de segunda a sexta foram catalogadas, todos os dias, quantidades múltiplas de 12, então podemos dizer que:

- Na segunda-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_1}$ livros, sendo $\mathbf{k_1}$ **inteiro**;
- Na terça-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_2}$ livros, sendo $\mathbf{k_2}$ **inteiro**;
- Na quarta-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_3}$ livros, sendo $\mathbf{k_3}$ **inteiro**;
- Na quinta-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_4}$ livros, sendo $\mathbf{k_4}$ **inteiro**; e
- Na sexta-feira, foram catalogados $\mathbf{12 \times k_5}$ livros, sendo $\mathbf{k_5}$ **inteiro**.

Logo, no período de segunda-feira a sexta-feira, foram catalogados:

$$12k_1 + 12k_2 + 12k_3 + 12k_4 + 12k_5$$

$$= 12 \times \underbrace{(\mathbf{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5})}_{\textbf{Inteiro}}$$

Observe, portanto, que o **total de livros catalogados de segunda-feira a sexta-feira é múltiplo de 12**, pois esse total pode ser escrito da forma "12 vezes um número inteiro".

Gabarito: CERTO.

6. (CESPE/Pref. SL/2017) A quantidade N de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas de determinado município é um número de três algarismos que pode ser escrito na forma N = X3Y, em que X e Y são dois algarismos entre 0 e 9. Sabe-se que cada escola recebeu a mesma quantidade de pacotes das demais e o número N é o maior possível que atende às condições descritas.

Nessa situação, a quantidade de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas do município foi

a) superior a 800 e inferior a 900.

b) superior a 900.

c) inferior a 600.

d) superior a 600 e inferior a 700.

e) superior a 700 e inferior a 800.

Comentários:

Note que a quantidade **N** de pacotes foi distribuída igualmente para 6 escolas. Isso significa que **N é divisível por 6.**

Lembre-se de que um número é divisível por 6 quando ele é **divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo**. Como **N** é escrito como **X3Y**, em que **X** e **Y** são algarismos, temos que:

- **N** é divisível por 2 → **N** é par → O último algarismo de **N**, dado por **Y**, é par.
  Logo, **Y pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.**

- **N** é divisível por 3 → A soma dos algarismos de **N** é divisível por 3. Logo:

  X + 3 + Y é divisível por 3

  Consequentemente, temos que:

  X + Y é divisível por 3

Observe, ainda, que **N é o maior possível que atende às condições descritas**.

O maior valor para **X**, que é o algarismo das centenas, é 9. Fazendo $X = 9$, devemos ter que:

- **Y pode ser igual a 0, 2, 4, 6 ou 8;**
- **X + Y é divisível por 3.**

Como **X + Y = 9 + Y**, devemos ter que **Y deve ser divisível por 3**, pois, nesse caso, **9 + Y** automaticamente será divisível por 3. Portanto:

- **Y pode ser igual a 0, 2, 4, 6 ou 8;**
- **Y é divisível por 3.**

Veja que, para maximizarmos o valor de **N = 93Y** respeitando as duas condições anteriores, teremos **Y = 6**. Portanto, o número procurado é **936**, valor este superior a 900.

Gabarito: Letra B.

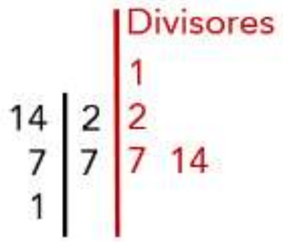
7. (CESPE/SECTI DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

Existem exatamente quatro números inteiros r para os quais a fração $\frac{14}{2r+1}$ é um número inteiro.

Comentários:

Primeiramente, observe que para $\frac{14}{2r+1}$ ser inteiro, $2r+1$ deve ser divisor inteiro de 14.

Vamos obter os divisores inteiros de 14.



Note que os divisores **naturais** (**positivos**) de 14 são **1**; **2**; **7** e **14**.

Logo, os divisores inteiros de 14 são **−14**; **−7**; **−2**; **−1**; **1**; **2**; **7** e **14**.

Sabemos que $2r+1$ deve ser divisor de 14. Portanto, as possibilidades para r são:

- $2r+1 = \mathbf{-14} \rightarrow 2r = -15 \rightarrow r = -7{,}5$
- $2r+1 = \mathbf{-7} \rightarrow 2r = -8 \rightarrow \boldsymbol{r = -4}$
- $2r+1 = \mathbf{-2} \rightarrow 2r = -3 \rightarrow r = -1{,}5$
- $2r+1 = \mathbf{-1} \rightarrow 2r = -2 \rightarrow \boldsymbol{r = -1}$
- $2r+1 = \mathbf{1} \rightarrow 2r = 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 0}$
- $2r+1 = \mathbf{2} \rightarrow 2r = 1 \rightarrow r = -0{,}5$
- $2r+1 = \mathbf{7} \rightarrow 2r = 6 \rightarrow \boldsymbol{r = 3}$
- $2r+1 = \mathbf{14} \rightarrow 2r = 13 \rightarrow r = 6{,}5$

Dentre as 8 possibilidades para r que fazem com que $\frac{14}{2r+1}$ seja inteiro, apenas 4 são números inteiros:

$$\mathbf{-4};\ \mathbf{-1};\ \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{3}$$

Portanto, **existem exatamente quatro números inteiros r para os quais a fração $\frac{14}{2r+1}$ é um número inteiro.**

Gabarito: CERTO.

8. (CESPE/PC DF/2013) Considerando que 300 pessoas tenham sido selecionadas para trabalhar em locais de apoio na próxima copa do mundo e que 175 dessas pessoas sejam do sexo masculino, julgue o seguinte item.

É impossível dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens.

Comentários:

Note que, em um grupo com **300 pessoas**, uma vez que **175 são homens**, temos **300−175 = 125 mulheres**.

Considere que x grupos foram formados. Nesse caso, cada um desses x grupos terão $\frac{175}{x}$ **homens** e $\frac{125}{x}$ **mulheres**.

É importante perceber que **a questão não diz que deve haver uma quantidade igual de homens e mulheres em cada grupo**. É necessário que todos os grupos tenham a mesma quantidade de homens $\left(\frac{175}{x}\right)$ e que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres $\left(\frac{125}{x}\right)$.

Observe, portanto, que **é possível** dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens. Para tanto, **basta que a quantidade de grupos formados (x) seja divisor tanto de 175 quanto de 125**.

Por exemplo, se forem formados $x = 5$ grupos, esses grupos podem ter sempre:

- $\frac{175}{5} = 35$ homens; e
- $\frac{125}{5} = 25$ mulheres

Por outro lado, se forem formados $x = 25$ grupos, esses grupos podem ter sempre:

- $\frac{175}{25} = 7$ homens; e
- $\frac{125}{25} = 5$ mulheres.

Como **é possível** dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens, o **gabarito** é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

9. (CESPE/Pref. Teresina/2009) A soma dos divisores primos, positivos e maiores que 2 do número 210 é igual a

a) 12.

b) 13.

c) 14.

d) 15.

Comentários:

Primeiramente, vamos fatorar o número 210.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Poderíamos obter todos os divisores positivos do número 210. Ocorre que, dente todos os divisores positivos possíveis, **os divisores positivos primos são 2, 3, 5 e 7**. **Qualquer outro divisor terá em sua composição um desses primos e, portanto, não será um divisor primo**.

Logo, os **divisores positivos primos maiores do que 2 do número 210 são 3, 5 e 7**, sendo a soma igual a:

$$3 + 5 + 7 = 15$$

Gabarito: Letra D.

QUESTÕES COMENTADAS - CEBRASPE

MMC e MDC

1. (CESPE/IFF/2018) Uma companhia aérea fixou rodízio entre duas cidades para seus comissários de bordo de determinado voo diário. A escala estabelece que o comissário A trabalhe nesse voo a cada 8 dias; o comissário B, a cada 10 dias; e o comissário C, a cada 12 dias.

Nesse caso, se os três tiverem trabalhado juntos no voo do dia de hoje, então a próxima vez em que eles trabalharão novamente juntos nesse voo ocorrerá daqui a

a) 30 dias.

b) 74 dias.

c) 120 dias.

d) 240 dias.

e) 960 dias.

Comentários:

Os três comissários trabalham a cada 8, 10 e 12 dias. Como os três trabalharam juntos hoje, eles trabalharão juntos novamente sempre que transcorrer um número de dias **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de 8, 10 e 12 dias. Como queremos saber **próxima vez** em que eles trabalharão juntos, precisamos obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) de 8, 10 e 12.

Primeiramente, devemos decompor 8, 10 e 12 em fatores primos.

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \times 4 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \times 3 \\ &= 2^2 \times 3 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$8 = 2^3$

$10 = 2^2 \times 5$

$12 = 2^2 \times 3$

Logo, $\text{MMC}(8;\ 10;\ 12) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$. Portanto, a próxima vez em que os três comissários trabalharão novamente juntos ocorrerá daqui a **120 dias**.

Gabarito: Letra C.

2. (CESPE/BNB/2018) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.

Situação hipotética: Carlos possui uma quantidade de revistas que é maior que 500 e menor que 700. Separando as revistas em conjuntos de 8 revistas, Carlos verificou que sobrou um grupo com 3 revistas. O mesmo acontecia quando ele separava as revistas em conjuntos de 14 ou em conjuntos de 20 revistas: sempre sobrava um conjunto com 3 revistas.

Assertiva: Nesse caso, é correto afirmar que Carlos possui 563 revistas.

Comentários:

Vamos supor que a **quantidade de revistas** que Carlos possui **é x**. Devemos determinar o valor de x.

Note que **a quantidade é maior que 500 e menor que 700**. Logo:

$$\mathbf{500 < x < 700}$$

Além disso, sabemos que **separando as revistas em conjuntos de 8, 14 ou 20 revistas, sempre sobra um grupo com 3 revistas.** Isso significa que $(x-3)$ **é múltiplo, simultaneamente, de 8, 14 e 20.**

Nesse momento, vamos obter o **menor múltiplo comum a 8, 14 e 20**, isto é, o MMC de 8, 14 e 20. Primeiramente, vamos decompor 8, 14 e 20 em fatores primos.

$$8 = 2 \times 4$$
$$= 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^3$$

$$14 = 2 \times 7$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 2^2 \times 5$$

Após decompor 8, 14 e 20 em fatores primos, devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$8 = 2^3$

$14 = 2 \quad \times 7$

$20 = 2^2 \times 5$

Logo, $\text{MMC}(8; 14; 20) = 2^3 \times 5 \times 7 = \mathbf{280}$. Esse é o menor múltiplo comum a **8, 14 e 20**.

Como $(x-3)$ **é múltiplo, simultaneamente, de 8, 14 e 20**, note que $(x-3)$ deve ser um m múltiplo de 280, isto é, $(x-3)$ **deve ser múltiplo do MMC entre 8, 14 e 20**. Logo, as possibilidades para $(x-3)$ são:

$$\underbrace{280}_{\text{MMC}}, \underbrace{\mathbf{560}}_{2\times280}, \underbrace{840}_{3\times280}, \underbrace{1120}_{4\times280}, \ldots$$

Lembre-se, também, que $500 < x < 700$. Isto é:

$$500 - 3 < (x-3) < 700 - 3$$

$$497 < (x-3) < 697$$

Como $(x-3)$ deve entre 497 e 697, devemos ter que **$(x-3)$ é igual a 560**. Os outros múltiplos de 280 estão fora desse intervalo. Portanto:

$$x - 3 = \mathbf{560}$$

$$x = 563$$

Nesse caso, é **correto afirmar** que Carlos possui **563 revistas**.

Gabarito: CERTO.

Texto para as próximas questões

Considerando que dois álbuns de fotos, com x e y páginas, sejam montados com o menor número possível de capítulos — divisão das fotos por eventos — e que cada capítulo, nos dois álbuns, deva ter o mesmo número z de páginas, julgue os itens subsequentes.

3. (CESPE/TRT 17/2013) Se x = 96 e y = 128, então z = 32.

4. (CESPE/TRT 17/2013) Se x é divisor de y, então z = x.

5. (CESPE/TRT 17/2013) z é múltiplo de x.

Comentários:

Antes julgar os itens da questão, vamos entender o enunciado.

Observe que temos x **páginas em um álbum** e y **páginas em outro álbum**. Os dois álbuns apresentam uma quantidade de capítulos diferentes. Ocorre que, para os dois álbuns, **cada capítulo deve conter exatamente z páginas**.

Observe, portanto, que para o **primeiro álbum teremos $\frac{x}{z}$ capítulos** e para o **segundo álbum teremos $\frac{y}{z}$ capítulos**.

Note que, para que tenhamos uma quantidade inteira de capítulos, necessariamente z deve ser divisor tanto de x quanto de y, isto é, **z deve ser divisor comum a x e a y.**

Além disso, os álbuns devem ser montados com o menor número possível de capítulos. Para tanto, o valor de páginas por capítulo, dado por **z, deve ser o maior possível**.

Portanto, temos que:

- **z é divisor comum a x e a y;**
- **z deve ser o maior possível.**

Logo, conclui-se que **z é o Máximo Divisor Comum (MDC) de x e y.**

Entendido o problema, vamos julgar os itens.

Questão 03

Se x = 96 e y = 128, então z = 32. CERTO.

Vimos que $z = \text{MDC}\ (\text{x}; \text{y})$. Para o caso em questão, $z = \text{MDC}(96; 128)$.

Vamos decompor os números em fatores primos:

$$96 = 2 \times 48$$
$$= 2 \times 2 \times 24$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 12$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 3$$
$$= 2^5 \times 3$$

$$128 = 2 \times 64$$
$$= 2 \times 2 \times 32$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 16$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2^4$$
$$= 2^7$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$96 = 2^5 \times 23$

$128 = 2^7$

Logo, $\text{MDC}\ (96; 128) = 2^5 = 32$. Portanto, $z = 32$.

Assim, **é correto afirmar que se x = 96 e y = 128, então z = 32**.

Questão 04

Se x é divisor de y, então z = x. CERTO.

Extraímos do enunciado que z é o **MDC** de x e y.

Da teoria de **MDC**, você deve se lembrar que se quisermos calcular o **MDC** de alguns números e **um deles é divisor de todos os outros**, **esse número é o MDC**.

Portanto, uma vez que ***x* é divisor** de ***y***, ***x* é o MDC entre *x* e *y***. Como z também é o **MDC** entre x e y, temos que $z = x$.

Questão 05

z é múltiplo de x. ERRADO.

Da teoria da aula, você deve se lembrar disso:

Se **B** é **divisor** de **A**, então **A** é um **múltiplo** de **B**.

Vimos que z é **divisor** de x, pois o número de capítulos do primeiro livro é $\frac{x}{z}$, que deve ser um número inteiro.

Logo, é correto afirmar que x é **múltiplo** de z, não o contrário.

Gabarito: 3 - CERTO. 4 - CERTO. 5 - ERRADO.

6. (CESPE/TRT 17/2013) Os garotos João e Pedro vão passear de bicicleta em uma pista circular, seguindo sempre em uma mesma direção, com velocidades diferentes. Eles iniciaram o passeio partindo, no mesmo instante, de um mesmo ponto e combinaram encerrar o passeio quando se encontrarem pela primeira vez no ponto de partida. Com base nessas informações, julgue o item seguinte.

Se, para completar cada volta na pista, João gasta 20 minutos e Pedro 24, então o passeio dos garotos durará menos de 2 horas.

Comentários:

Note que:

- João passa pelo ponto de partida a cada **20 minutos**; e
- Pedro passa pelo ponto de partida a cada **24 minutos**.

Veja que, iniciando o passeio no mesmo instante do mesmo ponto de partida, João e Pedro se encontrarão sempre que o tempo transcorrido for **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de 20 e 24 minutos. Como queremos saber o **próximo encontro**, momento no qual eles encerram o passeio, devemos determinar o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) **de 20 e 24**.

Primeiramente, devemos decompor 20 e 24 em fatores primos.

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 2^2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 12$$
$$= 2 \times 3 \times 4$$
$$= 2^3 \times 3$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$20 = 2^2 \quad\quad \times 5$

$24 = 2^3 \times 3$

Logo, $\text{MMC}(20; 24) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$. Isso significa que o próximo encontro entre João e Pedro ocorrerá após transcorridos **120 minutos**.

Portanto, é **ERRADO afirmar que o passeio dos garotos durará menos de 2 horas**, pois o passeio irá durar **exatamente 2 horas**.

Gabarito: ERRADO.

Texto para as próximas questões

Ao distribuir entre 5 técnicos do MPU determinada quantidade de processos para análise, de modo que todos recebessem quantidades iguais de processos, o chefe da unidade verificou que sobrava um processo; ao tentar distribuir igualmente entre 6 técnicos, novamente sobrou um processo, situação que se se repetiu quando ele tentou distribuir os processos igualmente entre 7 técnicos.

Considerando que N > 1 seja a quantidade de processos que serão analisados pelos técnicos, julgue os itens seguintes, com base nas informações apresentadas.

7. (CESPE/MPU/2013) É correto afirmar que N > 210.

8. (CESPE/MPU/2013) Se P é o mínimo múltiplo comum entre 5, 6 e 7, então N é múltiplo de P.

Comentários:

Sabemos que **dividindo os N processos entre 5, 6 ou 7 técnicos, sempre sobra 1 processo.**

Se subtrairmos 1 processo do total de processos, temos que essa quantia é múltipla de 5, 6 e 7. Isso significa que $(N-1)$ **é múltiplo, simultaneamente, de 5, 6 e 7.**

Nesse momento, vamos obter o **menor múltiplo comum entre 5, 6 e 7**, isto é, o MMC de 5, 6 e 7.

Lembre-se que, após a decomposição em fatores primos, devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$5 = 5$

$6 = 2 \times 3$

$7 = 7$

Logo, $\text{MMC}(5;6;7) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = \mathbf{210}$. Esse é o menor múltiplo comum a **5, 6 e 7**.

Como $(N-1)$ **é múltiplo, simultaneamente, de 5, 6 e 7**, note que $(N-1)$ deve ser um múltiplo de 210, isto é, $(N-1)$ **deve ser múltiplo do MMC entre 5, 6 e 7**. Logo, as possibilidades para $(N-1)$ são:

$$\underbrace{210}_{\text{MMC}}, \underbrace{420}_{2\times210}, \underbrace{630}_{3\times210}, \underbrace{840}_{4\times210}, \ldots$$

Portanto, as **possibilidades para N** são:

$$\underbrace{211}_{\text{MMC}+1}, \underbrace{421}_{2\times210+1}, \underbrace{631}_{3\times210+1}, \underbrace{841}_{4\times210+1}, \ldots$$

Vamos agora julgar os itens da questão.

Questão 07

É correto afirmar que N > 210. **CERTO**.

Vimos que as possibilidades para N são:

$$\underbrace{211}_{\text{MMC}+1}, \underbrace{421}_{2\times210+1}, \underbrace{631}_{3\times210+1}, \underbrace{841}_{4\times210+1}, \ldots$$

Portanto, **N é maior do que 210.**

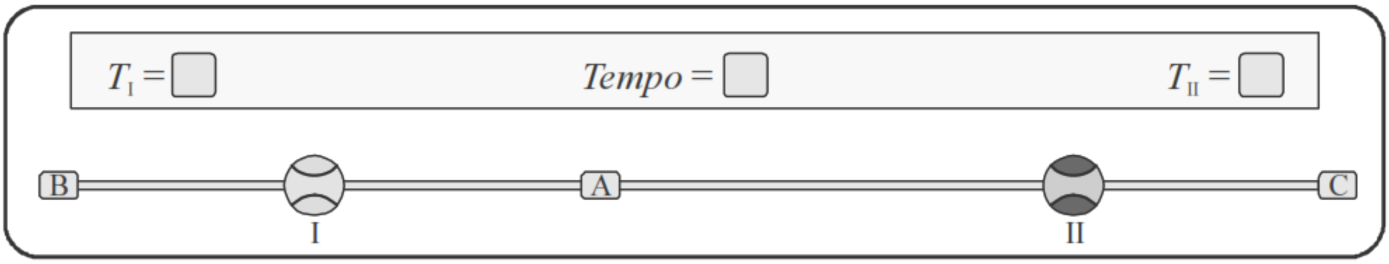
Questão 08

Se P é o mínimo múltiplo comum entre 5, 6 e 7, então N é múltiplo de P. ERRADO.

N **não é múltiplo do MMC entre 5, 6 e 7**. Vimos que que $(N-1)$ **deve ser múltiplo do MMC entre 5, 6 e 7**.

Gabarito: 7 - CERTO. 8 - ERRADO.

Texto para as próximas questões



A figura acima ilustra um brinquedo virtual, em que duas bolas — I e II — se movimentam em uma haste a partir do momento que o brinquedo é ligado, ambas com a mesma velocidade e de maneira contínua, indo de uma extremidade à outra. A bola I se movimenta de A para B e de B para A; a bola II, de A para C e de C para A. Antes de o brinquedo ser ligado, devem ser indicados valores nos mostradores T_I e T_{II}. Indicar T_I = M significa que a bola I levará M segundos para ir de A até B; T_{II} = N significa que a bola II levará N segundos para ir de A até C. O mostrador Tempo indica há quantos segundos o brinquedo está ligado. No momento que o brinquedo é ligado, os movimentos se iniciam sempre a partir do ponto A.

Com relação às funcionalidades do brinquedo descrito acima, julgue os itens a seguir.

9.(CESPE/AFT/2013) Se T_I = 3 e T_{II} = 9, então, toda vez que o mostrador Tempo indicar um múltiplo de 6, as bolas I e II se encontrarão no ponto A.

10. (CESPE/AFT/2013) Se T_I = 5 e T_{II} = 8, então, depois que o brinquedo foi ligado, as bolas nunca mais se encontrarão simultaneamente no ponto A.

11. (CESPE/AFT/2013) Se T_I = 3, então, quando o mostrador Tempo indicar 15 segundos, a bola I estará no ponto B.

12. (CESPE/AFT/2013) Se T_{II} = 5, então, quando o mostrador Tempo indicar 64 segundos, a bola II estará mais próxima de C do que de A.

Comentários:

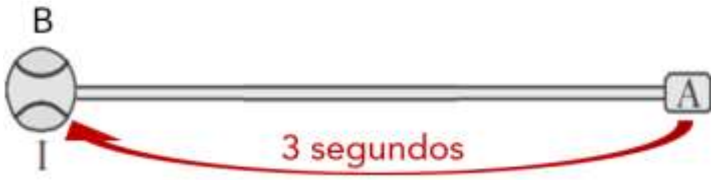
Antes de começarmos a julgar as assertivas, vamos entender o problema.

Inicialmente, é importante lembrar que **os movimentos das bolas sempre iniciam no ponto A**.

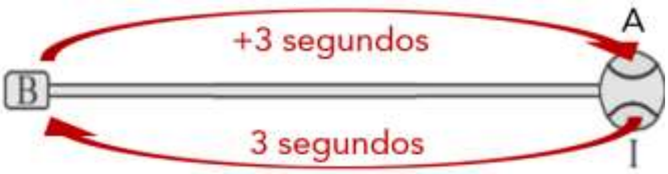
Movimento da bola I

O movimento da **bola I** está restrito ao segmento **A—B**.

Quando o mostrador indicar, por exemplo, $\mathbf{T_I = 3}$, isso significa que a **bola I** leva 3 segundos para ir de **A** até **B**.



Além disso, como a velocidade é constante, sabemos que em mais 3 segundos a **bola I** volta de **B** para **A**.

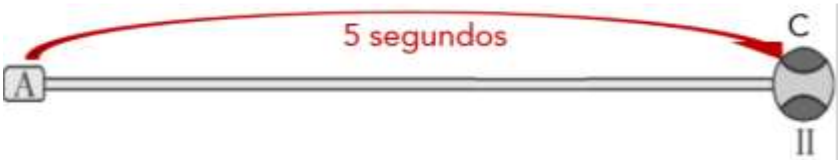


Veja, portanto, que para um determinado valor de $\mathbf{T_I}$, a **bola I** levará um **tempo 2×$\mathbf{T_I}$ para sair de A e voltar para o ponto A**.

Movimento da bola II

O movimento da **bola II** está restrito ao segmento **A—C**.

Quando o mostrador indicar, por exemplo, $\mathbf{T_{II} = 5}$, isso significa que a **bola II** leva 3 segundos para ir de **A** até **C**.



Além disso, como a velocidade é constante, sabemos que em mais 5 segundos a **bola II** volta de **C** para **A**.

Veja, portanto, que para um determinado valor de $\mathbf{T_{II}}$, a **bola II** levará um **tempo 2×$\mathbf{T_{II}}$ para sair de A e voltar para o ponto A**.

Agora que entendemos como funciona o brinquedo, vamos resolver os itens da questão.

Questão 09

Se T_I = 3 e T_{II} = 9, então, toda vez que o mostrador Tempo indicar um múltiplo de 6, as bolas I e II se encontrarão no ponto A. ERRADO.

Observe que, se **T_I = 3 e T_{II} = 9**, temos que:

- A **bola I** sai de **A** e retorna para **A** em 2×**T_I** = 6 segundos; e
- A **bola II** sai de **A** e retorna para **A** em 2×**T_{II}** = 18 segundos.

Logo, as **bolas I** e **II** se encontrarão em um tempo que é **múltiplo comum** a 6 e a 18.

O **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) entre 6 e 18 é 18, pois 18 é múltiplo de 6.

Logo, **as bolas se encontrarão no ponto A a cada 18 segundos**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 10

Se T_I = 5 e T_{II} = 8, então, depois que o brinquedo foi ligado, as bolas nunca mais se encontrarão simultaneamente no ponto A. ERRADO.

Observe que, se **T_I = 5 e T_{II} = 8**, temos que:

- A **bola I** sai de **A** e retorna para **A** em 2×**T_I** = 10 segundos; e
- A **bola II** sai de **A** e retorna para **A** em 2×**T_{II}** = 16 segundos.

Logo, as **bolas I** e **II** se encontrarão em um tempo que é **múltiplo comum** a 10 e a 16.

Para obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) entre 10 e 16, primeiramente devemos decompor 10 e 16 em fatores primos.

$$10 = 2 \times 5$$

$$\begin{aligned}16 &= 2 \times 8 \\ &= 2 \times 2 \times 4 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^4\end{aligned}$$

Devemos selecionar todos os fatores primos obtidos com os maiores expoentes e realizar o produto.

$10 = 2 \times 5$

$16 = 2^4$

Logo, $\text{MMC}(10; 16) = 2^4 \times 5 = 80.$

Portanto, **as bolas se encontrarão no ponto A a cada 80 segundos**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Questão 11

Se T_I = 3, então, quando o mostrador Tempo indicar 15 segundos, a bola I estará no ponto B. CERTO.

Quando tivermos 15 segundos transcorridos, a **bola I** terá feito o seguinte trajeto:

$$\underbrace{A \underbrace{-}_{3\text{ seg.}} B \underbrace{-}_{3\text{ seg.}} A \underbrace{-}_{3\text{ seg.}} B \underbrace{-}_{3\text{ seg.}} A \underbrace{-}_{3\text{ seg.}} B}_{15\text{ segundos}}$$

Portanto, **em 15 segundos**, **a bola I estará no ponto B**. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Questão 12

Se T_{II} = 5, então, quando o mostrador Tempo indicar 64 segundos, a bola II estará mais próxima de C do que de A. CERTO.

Note que a cada 2×T_{II} = **10 segundos**, a **bola II** sai do ponto **A** e retorna ao ponto **A.** Portanto, em 60 segundos, a **bola II** terá feito 6 vezes esse percurso, voltando ao ponto A.

Após 4 segundos, totalizando **64** segundos, a **bola II** terá percorrido $\frac{4}{5}$ do percurso **A—C** partindo de A.

Logo, a **bola II** estará mais próxima de **C** do que de **A**. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Gabarito: 09 - ERRADO. 10 - ERRADO. 11 - CERTO. 12 - CERTO.

Texto para as próximas questões

Considerando que N seja o conjunto de todos os números inteiros maiores ou iguais a 1 e que, para cada m ϵ N o conjunto A(m) seja o subconjunto de N formado por todos os números divisíveis por m, julgue os itens a seguir.

13. (CESPE/ANS/2013) O conjunto A(15)∩A(10) contém o conjunto A(60).

14. (CESPE/ANS/2013) O conjunto A(6)∪A(8) contém o conjunto A(14).

Comentários:

Antes de julgar as assertivas, vamos entender o enunciado.

N é o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a 1: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

A(m) é um conjunto que é formado pelos inteiros positivos **divisíveis por** **m**.

Em outras palavras, **A(m)** é um conjunto que é formado por todos os **múltiplos de** **m** **maiores do que 1**. Por exemplo, $A(5)$ é formado pelos múltiplos de 5 maiores do que 1:

$$A(5) = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$$

Agora que entendemos o enunciado, vamos julgar as assertivas.

Questão 13

O conjunto A(15)∩A(10) contém o conjunto A(60). CERTO.

Note que $A(15)$ é o conjunto dos múltiplos de 15 maiores do que 1:

$$A(15) = \{15, 30, 45, 60, 75, \dots\}$$

Por outro lado, $A(10)$ é o conjunto dos múltiplos de 10 maiores do que 1:

$$A(10) = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, \dots\}$$

A intersecção de $A(15)$ com $A(10)$ nos trará os múltiplos que são comuns a 15 e a 10. O **menor múltiplo** que é comum a 15 e a 10 é o **MMC** entre 15 e 10.

Para obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) entre 15 e 10, primeiramente devemos decompor 15 e 10 em fatores primos.

$$15 = 3 \times 5$$

$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$15 = \quad 3 \times 5$

$10 = 2 \quad \times 5$

Logo, $\text{MMC}(15; 10) = 2 \times 3 \times 5 = 30$. Isso significa que **a intersecção de $A(15)$ e $A(10)$ nos trará os múltiplos de 30 maiores do que 1**:

$$\text{A}(15) \cap \text{A}(10) = \text{A}(30) = \{30, \mathbf{60}, 90, \mathbf{120}, 150, \mathbf{180}, 210, \mathbf{240}, \dots\}$$

Observe que **esse conjunto contém o conjunto $A(60)$, pois todos os múltiplos de 60 fazem parte dos múltiplos de 30**. Logo, é **correto** afirmar que **o conjunto A(15)∩A(10) contém o conjunto A(60).**

Questão 14

O conjunto A(6)∪A(8) contém o conjunto A(14). ERRADO.

Note que $A(6)$ é o conjunto dos múltiplos de 6 maiores do que 1:

$$A(6) = \{\mathbf{6}, \mathbf{12}, \mathbf{18}, \mathbf{24}, \mathbf{30}, \mathbf{36}, \mathbf{42}, \mathbf{48}, \ldots\}$$

Por outro lado, $A(8)$ é o conjunto dos múltiplos de 8 maiores do que 1:

$$A(8) = \{\mathbf{8}, \mathbf{16}, \mathbf{24}, \mathbf{32}, \mathbf{40}, \mathbf{48}, \ldots\}$$

A união de $A(6)$ com $A(8)$ nos trará os múltiplos de 6 e os múltiplos de 8 maiores do que 1:

$$A(6) \cup A(8) = \{\mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{12}, \mathbf{16}, \mathbf{18}, \mathbf{24}, \mathbf{30}, \mathbf{32}, \mathbf{36}, \mathbf{40}, \mathbf{42}, \mathbf{48} \ \ldots\}$$

Por outro lado, o conjunto $A(14)$ é o conjunto dos múltiplos de 14 maiores do que 1:

$$A(14) = \{14, 28, 42, 56, \ldots\}$$

Note que **A(6)∪A(8) não contém o conjunto A(14)**. Essa afirmação pode ser verificada observando-se que o elemento 14 pertence o conjunto **A(14)** e não pertence ao conjunto **A(6)∪A(8)**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: 13 - CERTO. 14 - ERRADO.

15. (CESPE/STM/2011) Acerca dos conjuntos A = {6, 8, 10, 12} e B = {4, 6, 10}, julgue o seguinte item.

O mínimo múltiplo comum dos elementos do conjunto A / B = {x ∈A; x ∉B} é múltiplo de 5.

Comentários:

O conjunto **A / B** corresponde à **operação de subtração** entre **A** e **B**. **A / B** é o conjunto formado por todos os elementos de **A** que não estão em **B:**

$$A \,/\, B \ = \{8, 12\}$$

Para obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) entre 8 e 12, primeiramente devemos decompor 8 e 12 em fatores primos.

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \times 4 \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \times 3 \\ &= 2^2 \times 3 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \times 3$

Logo, $\text{MMC}(8; 12) = 2^3 \times 3 = 24$. Note, portanto, que este número **não é múltiplo de 5**. O **gabarito**, portanto, é **ERRADO**.

Gabarito: ERRADO.

16. (CESPE/MPE AM/2008) Ainda com relação a números naturais, inteiros, racionais e reais, fatoração e números primos, razões e proporções e porcentagens, julgue o seguinte item.

Considere que em determinado país as eleições para deputados ocorrem de 4 em 4 anos, para prefeitos, de 6 em 6 anos, e para senadores, de 8 em 8 anos. Se neste ano foram realizadas eleições para esses três cargos, então a próxima vez que as eleições para esses três cargos ocorrerão novamente no mesmo ano será daqui a mais de 20 anos.

Comentários:

Note que:

- As eleições para deputado correm a cada **4 anos**;
- As eleições para prefeito correm a cada **6 anos**; e
- As eleições para senador correm a cada **8 anos**.

Como as três eleições ocorreram neste ano, as três eleições ocorrerão simultaneamente sempre que o tempo transcorrido for **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de 4, 6 e 8 anos. Como queremos saber a **próxima vez** em que as eleições ocorrem ao mesmo tempo, devemos determinar o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) **de 4, 6 e 8**.

Devemos decompor os números em fatores primos, selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$4 = 2^2$

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

Logo, $\text{MMC}(4; 6; 8) = 2^3 \times 3 = 24$. Isso significa que a próxima eleição simultânea para os três cargos ocorrerá após transcorridos **24 anos**. O **gabarito**, portanto, é **CERTO**.

Gabarito: CERTO.

17. (CESPE/MPE AM/2008) Ainda com relação a números naturais, inteiros, racionais e reais, fatoração e números primos, razões e proporções e porcentagens, julgue o seguinte item.

Considere a seguinte situação.

Para a manutenção das instalações hidráulicas do prédio do Ministério Público, um artífice hidráulico recebeu tubos de PVC de 3 comprimentos diferentes: 5 peças de 240 cm cada uma, 2 peças de 420 cm cada uma e 4 peças de 600 cm cada uma. Para economia de material, o engenheiro chefe recomendou ao artífice que cortasse cada um desses tubos em pedaços que tivessem o mesmo comprimento, que esse comprimento fosse o maior possível e que de cada tubo não sobrasse nenhum pedaço.

Nessa situação, é correto afirmar que, depois de cortar todos os tubos seguindo a recomendação do engenheiro, o artífice obteve menos de 70 pedaços de tubo.

Comentários:

Suponha que o **maior comprimento** possível pedaços cortados é de x centímetros.

Como no corte dos três tubos não deve haver sobra, perceba que x deve ser **divisor**, **ao mesmo tempo**, dos comprimentos dos três tubos.

Logo x deve ser o **maior divisor possível** que é **comum** a **240**, **420** e **600**. Portanto, $x = \text{MDC}(240; 420; 600)$.

Vamos decompor os números em fatores primos:

$$240 = 24 \times 10$$
$$= 2 \times 12 \times 2 \times 5$$
$$= 2 \times 3 \times 4 \times 2 \times 5$$
$$= 2^4 \times 3 \times 5$$

$$420 = 42 \times 10$$
$$= 2 \times 21 \times 2 \times 5$$
$$= 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5$$
$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$600 = 6 \times 100$$
$$= 2 \times 3 \times (10)^2$$
$$= 2 \times 3 \times (2 \times 5)^2$$
$$= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^2$$
$$= 2^3 \times 3 \times 5^2$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Logo, $\text{MDC}(240; 420; 600) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$. Portanto, $x = 60$.

Agora que sabemos que o comprimento dos pedaços é de **60cm**, vamos obter o total de pedaços que se pode ter do total de peças.

Temos 5 peças de 240 cm cada uma, 2 peças de 420 cm cada uma e 4 peças de 600 cm cada uma. Portanto, o total de pedaços de **60cm** é:

$$5 \times \frac{240}{60} + 2 \times \frac{420}{60} + 4 \times \frac{600}{60}$$

$$= 5 \times 4 + 2 \times 7 + 4 \times 10$$

$$= 20 + 14 + 40$$

$$= 74$$

Portanto, é **ERRADO** **dizer que o artífice obteve menos de 70 pedaços de tubo**.

Gabarito: ERRADO.

18. (CESPE/MPE RR/2008) Com relação a números e operações com números, julgue o seguinte item.

Se, para a copa de um tribunal, a compra de pó de café é feita a cada 12 dias e a de açúcar, a cada 20 dias, e se, no dia 1.º de maio, para essa copa, foi feita a compra dos dois produtos juntos, então, a próxima vez que será feita novamente a compra dos dois produtos juntos será em algum dia do mês de julho.

Comentários:

Note que:

- A compra de pó de café é feita a cada **12 dias**; e
- A compra de açúcar é feita a cada **20 dias**.

Como a compra dos dois produtos ocorreu no dia 1º de maio, a compra ocorrerá simultaneamente sempre que o tempo transcorrido a partir de 1º de maio for **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de 12 e 20 dias. Como queremos saber a **próxima vez** em que a compra ocorre simultaneamente, devemos determinar o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) **de 12 e 20**.

Para obter o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) entre 12 e 20, primeiramente devemos decompor 12 e 20 em fatores primos.

$$12 = 4 \times 3$$
$$= 2^2 \times 3$$

$$20 = 2 \times 10$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 2^2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$12 = 2^2 \times 3$

$20 = 2^2 \quad\quad \times 5$

Logo, $\text{MMC}(12; 20) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$. Portanto, a nova compra simultânea ocorrerá após **60 dias**.

Somando-se 60 dias a 1º de maio, obtém-se **30 de junho**. Logo, é **ERRADO** afirmar que a próxima compra ocorrerá em algum dia do mês de julho.

Gabarito: ERRADO.

19. (CESPE/PGE PA/2007) A frota de veículos de uma empresa é composta de x veículos. Sabe-se que o máximo divisor comum entre x e 24 é igual a 12 e que 72 é o mínimo múltiplo comum entre x e 24. Nessa situação, é correto afirmar que o número de divisores positivos de x é igual a

a) 7.

b) 8.

c) 9.

e) 10.

Comentários:

Primeiramente, observe que a **decomposição em fatores primos de 24** é $\mathbf{2^3 \times 3}$:

$$24 = 2 \times 12$$
$$= 2 \times 4 \times 3$$
$$= 2^3 \times 3$$

Temos o **MDC** e o **MMC** entre x e 24.

Para calcular o **máximo divisor comum** (**MDC**), devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

Note que a decomposição em fatores primos de 12 é a seguinte:

$$12 = 4 \times 3$$
$$= 2^2 \times 3$$

Como $\mathrm{MDC}(\mathrm{x}; 24) = 12 = 2^2 \times 3$, note que:

- **O número x necessariamente apresenta o fator 2^2**. Isso porque, no número 24, o primo 2 apresenta expoente 3 (2^3), e o **MDC** extrai o **menor expoente**, que deve vir do número x;

- **O número x apresenta o primo 3**. Isso porque o **MDC** extrai os **primos comuns**. O expoente relacionado a esse primo 3 no número x, nesse momento, é desconhecido.

Para calcular o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**), devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Note que a decomposição em fatores primos de 72 é a seguinte:

$$72 = 2 \times 36$$
$$= 2 \times 2 \times 18$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$$
$$= 2^3 \times 3^2$$

Como $\mathrm{MMC}(\mathrm{x}; 24) = 72 = 2^3 \times 3^2$, note que:

- **O número x não apresenta outro número primo em sua composição além dos primos 2 e 3**, pois caso contrário este novo primo estaria na composição do **MMC**; e
- **O primo 3 presente na composição do número x apresenta expoente 2**, pois o **MMC** extrai os **maiores expoentes**, e o número 12 apresenta o fator 3^1.

A partir das 4 conclusões obtidas sobre o número x, temos que $x = 2^2 \times 3^2$.

O número de divisores positivos de x é obtido da seguinte maneira:

- Obter todos os expoentes dos fatores primos;
- Somar 1 a cada um desses expoentes e realizar o produto dos números obtidos.

Logo, a quantidade de divisores de $x = 2^{\mathbf{2}} \times 3^{\mathbf{2}}$ é:

$$(\mathbf{2} + 1) \times (\mathbf{2} + 1) = 3 \times 3 = 9$$

Gabarito: Letra C.

20. (CESPE/TJ RR/2006) Considere que um tribunal tenha 24 motoristas e 36 auxiliares administrativos e que, para agilizar o atendimento aos magistrados e demais servidores da casa, o presidente determine que os motoristas e os auxiliares sejam divididos em equipes. Cada equipe deve ser formada apenas por profissionais do mesmo cargo, deve ter o mesmo número de elementos e esse número de elementos deve ser o maior possível. Nessa situação, o número de equipes de motoristas, o número de equipes de auxiliares administrativos e o número de elementos em cada equipe serão, respectivamente, iguais a

a) 4, 6 e 6.

b) 6, 9 e 4.

c) 2, 3 e 12.

d) 8, 12 e 3.

Comentários:

Suponha que o número de elementos de cada equipe é x.

Como cada equipe deve ser formada apenas por profissionais do mesmo cargo, perceba que x deve ser **divisor**, **ao mesmo tempo**, de 24 e de 36.

Além disso, o número de elementos de cada equipe deve ser o **maior possível**. Logo, x deve ser o **maior divisor possível** que é **comum** a 24 e 36. Portanto, $x = \mathrm{MDC}(24; 36)$.

Vamos decompor os números em fatores primos:

$$\begin{aligned} 24 &= 24 \\ &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 4 \times 3 \\ &= 2^3 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36 &= 6 \times 6 \\ &= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \\ &= 2^2 \times 3^2 \end{aligned}$$

Devemos selecionar os fatores primos **comuns** com os **menores expoentes** e realizar o produto.

$24 = 2^3 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

Logo, $\mathrm{MDC}(24; 36) = 2^2 \times 3 = 12$. Portanto, $x = 12$.

Agora que sabemos que o **número de elementos de cada equipe** é **12**, temos que:

- O número de equipes de motoristas é:

$$\frac{24 \text{ motoristas}}{12 \text{ por equipe}} = \mathbf{2\ equipes}$$

- O número de equipes de auxiliares administrativos é:

$$\frac{36 \text{ auxiliares}}{12 \text{ por equipe}} = \mathbf{3\ equipes}$$

Logo, o número de **equipes de motoristas**, o número de **equipes de auxiliares** administrativos e o **número de elementos em cada equipe** serão, respectivamente, iguais a **2, 3 e 12**.

Gabarito: Letra C.

21. (CESPE/TJ RR/2006) Em um bairro, a coleta de lixo ocorre de 3 em 3 dias e o caminhão que vende gás de cozinha passa de 8 em 8 dias. No dia de hoje, ocorreu a coleta de lixo e passou o caminhão vendendo gás de cozinha. Então, a próxima vez que ocorrerá a coleta de lixo e passará o caminhão vendendo gás em um mesmo dia será daqui a

a) 24 dias.

b) 21 dias.

c) 18 dias.

d) 15 dias.

Comentários:

Note que:

- A coleta de lixo é feita a cada **3 dias**; e
- O caminhão de gás passa a cada **8 dias**.

Como hoje ocorreu a coleta de lixo e o caminhão de gás passou, os dois acontecimentos ocorrerão simultaneamente sempre que o tempo transcorrido for **múltiplo**, **ao mesmo tempo**, de 3 e 8 dias. Como queremos saber a **próxima vez** em que os eventos ocorrem simultaneamente, devemos determinar o **mínimo múltiplo comum** (**MMC**) **de 3 e 8**.

Devemos decompor 3 e 8 em fatores primos, selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$3 = \quad 3$

$8 = 2^3$

Logo, $\text{MMC}(3;8) = 2^3 \times 3 = 24$. Portanto, a próxima vez que ocorrerá a coleta de lixo e passará o caminhão vendendo gás em um mesmo dia será daqui a **24 dias**.

Gabarito: Letra A.

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

Múltiplos e Divisores

1.(CESPE/SERPRO/2021) Suponha que sejam gerados 5 números válidos de CPF para serem atribuídos a 5 indivíduos distintos. Com base nessas informações, julgue o item a seguir.

Suponha que a seja o último dígito de um dos CPFs gerados, que b seja o último dígito de outro desses CPFs e que a e b sejam números ímpares consecutivos. Nessa situação, a + b é múltiplo de 4.

2. (CESPE/PC DF/2021) No item a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada.

Um foragido da justiça, que gostava de se exibir perante seus comparsas e conhecia um pouco de matemática, ligou para a polícia e passou as seguintes informações: "em 30 minutos, eu estarei na rua Alfa, em uma casa, do lado direito da rua, cujo número tem as seguintes características: é inferior a 1.000, o algarismo das centenas é igual ao número de diagonais de um retângulo e, além disso, a parte do número formada só pelos algarismos das dezenas e das unidades é múltiplo de 7". Uma viatura foi deslocada para o intervalo de casas da rua Alfa correspondente ao algarismo das centenas revelado. Lá chegando, os policiais verificaram que, nesse trecho da rua Alfa, os números das casas tinham as seguintes características: os algarismos das dezenas e das unidades começavam de 01 e de uma casa para a próxima eram acrescentadas 8 unidades. Nessa situação, o número da casa informado pelo foragido é inferior a 250.

3. (CESPE/Pref. São Cristóvão/2019) Julgue o item a seguir, relativo a sequências numéricas.

A quantidade de números inteiros múltiplos de 19 que estão entre 1.234 e 4.321 é inferior a 160.

4. (CESPE/SEFAZ RS/2018) Uma assistente administrativa rasgou em n pedaços uma folha de papel que continha informação considerada sigilosa. Como ainda era possível ler alguma informação em um desses pedaços, ela rasgou-o também em n pedaços. Receosa de que a informação sigilosa pudesse ser recuperada de um desses últimos pedaços, rasgou-o também em n pedaços.

Assinale a opção que indica uma quantidade possível de pedaços em que a folha foi rasgada.

a) 15

b) 26

c) 28

d) 30

e) 36

5. (CESPE/FUB/2018) Paulo, Maria e João, servidores lotados em uma biblioteca pública, trabalham na catalogação dos livros recém-adquiridos. Independentemente da quantidade de livros a serem catalogados em cada dia, Paulo cataloga 1/4, Maria cataloga 1/3 e João, 5/12.

A respeito da catalogação de livros por esses servidores, julgue o item a seguir.

Sempre que trabalharem de segunda-feira a sexta-feira, os três servidores catalogarão uma quantidade de livros que será um número múltiplo de 12.

6. (CESPE/Pref. SL/2017) A quantidade N de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas de determinado município é um número de três algarismos que pode ser escrito na forma N = X3Y, em que X e Y são dois algarismos entre 0 e 9. Sabe-se que cada escola recebeu a mesma quantidade de pacotes das demais e o número N é o maior possível que atende às condições descritas.

Nessa situação, a quantidade de pacotes de arroz distribuídos no primeiro trimestre para as 6 escolas do município foi

a) superior a 800 e inferior a 900.

b) superior a 900.

c) inferior a 600.

d) superior a 600 e inferior a 700.

e) superior a 700 e inferior a 800.

7. (CESPE/SECTI DF/2014) Acerca das propriedades dos conjuntos numéricos, julgue o item a seguir.

Existem exatamente quatro números inteiros r para os quais a fração $\frac{14}{2r+1}$ é um número inteiro.

8. (CESPE/PC DF/2013) Considerando que 300 pessoas tenham sido selecionadas para trabalhar em locais de apoio na próxima copa do mundo e que 175 dessas pessoas sejam do sexo masculino, julgue o seguinte item.

É impossível dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens.

9. (CESPE/Pref. Teresina/2009) A soma dos divisores primos, positivos e maiores que 2 do número 210 é igual a

a) 12.

b) 13.

c) 14.

d) 15.

Gabarito - Cebraspe

Múltiplos e Divisores

1. CERTO
2. CERTO
3. ERRADO
4. LETRA C
5. CERTO
6. LETRA B
7. CERTO
8. ERRADO
9. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES - CEBRASPE

MMC e MDC

1. (CESPE/IFF/2018) Uma companhia aérea fixou rodízio entre duas cidades para seus comissários de bordo de determinado voo diário. A escala estabelece que o comissário A trabalhe nesse voo a cada 8 dias; o comissário B, a cada 10 dias; e o comissário C, a cada 12 dias.

Nesse caso, se os três tiverem trabalhado juntos no voo do dia de hoje, então a próxima vez em que eles trabalharão novamente juntos nesse voo ocorrerá daqui a

a) 30 dias.

b) 74 dias.

c) 120 dias.

d) 240 dias.

e) 960 dias.

2. (CESPE/BNB/2018) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.

Situação hipotética: Carlos possui uma quantidade de revistas que é maior que 500 e menor que 700. Separando as revistas em conjuntos de 8 revistas, Carlos verificou que sobrou um grupo com 3 revistas. O mesmo acontecia quando ele separava as revistas em conjuntos de 14 ou em conjuntos de 20 revistas: sempre sobrava um conjunto com 3 revistas.

Assertiva: Nesse caso, é correto afirmar que Carlos possui 563 revistas.

Texto para as próximas questões

Considerando que dois álbuns de fotos, com x e y páginas, sejam montados com o menor número possível de capítulos — divisão das fotos por eventos — e que cada capítulo, nos dois álbuns, deva ter o mesmo número z de páginas, julgue os itens subsequentes.

3. (CESPE/TRT 17/2013) Se x = 96 e y = 128, então z = 32.

4. (CESPE/TRT 17/2013) Se x é divisor de y, então z = x.

5. (CESPE/TRT 17/2013) z é múltiplo de x.

6. (CESPE/TRT 17/2013) Os garotos João e Pedro vão passear de bicicleta em uma pista circular, seguindo sempre em uma mesma direção, com velocidades diferentes. Eles iniciaram o passeio partindo, no mesmo instante, de um mesmo ponto e combinaram encerrar o passeio quando se encontrarem pela primeira vez no ponto de partida. Com base nessas informações, julgue o item seguinte.

Se, para completar cada volta na pista, João gasta 20 minutos e Pedro 24, então o passeio dos garotos durará menos de 2 horas.

Texto para as próximas questões

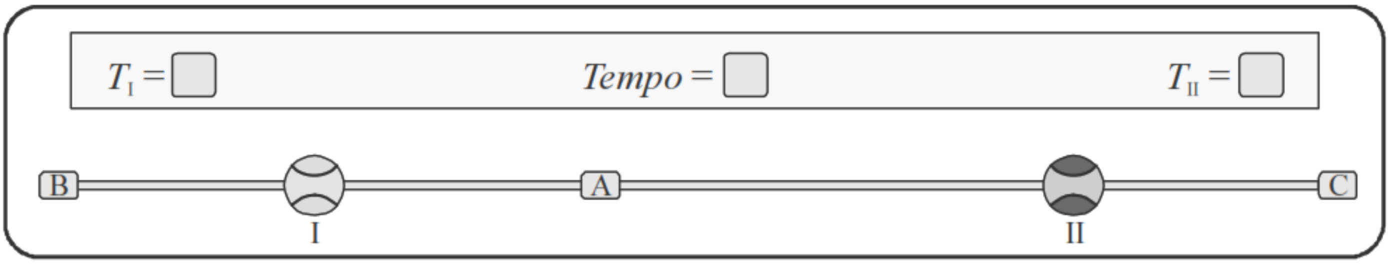
Ao distribuir entre 5 técnicos do MPU determinada quantidade de processos para análise, de modo que todos recebessem quantidades iguais de processos, o chefe da unidade verificou que sobrava um processo; ao tentar distribuir igualmente entre 6 técnicos, novamente sobrou um processo, situação que se se repetiu quando ele tentou distribuir os processos igualmente entre 7 técnicos.

Considerando que N > 1 seja a quantidade de processos que serão analisados pelos técnicos, julgue os itens seguintes, com base nas informações apresentadas.

7. (CESPE/MPU/2013) É correto afirmar que N > 210.

8. (CESPE/MPU/2013) Se P é o mínimo múltiplo comum entre 5, 6 e 7, então N é múltiplo de P.

Texto para as próximas questões



A figura acima ilustra um brinquedo virtual, em que duas bolas — I e II — se movimentam em uma haste a partir do momento que o brinquedo é ligado, ambas com a mesma velocidade e de maneira contínua, indo de uma extremidade à outra. A bola I se movimenta de A para B e de B para A; a bola II, de A para C e de C para A. Antes de o brinquedo ser ligado, devem ser indicados valores nos mostradores T_I e T_{II}. Indicar T_I = M significa que a bola I levará M segundos para ir de A até B; T_{II} = N significa que a bola II levará N segundos para ir de A até C. O mostrador Tempo indica há quantos segundos o brinquedo está ligado. No momento que o brinquedo é ligado, os movimentos se iniciam sempre a partir do ponto A.

Com relação às funcionalidades do brinquedo descrito acima, julgue os itens a seguir.

9.(CESPE/AFT/2013) Se T_I = 3 e T_{II} = 9, então, toda vez que o mostrador Tempo indicar um múltiplo de 6, as bolas I e II se encontrarão no ponto A.

10. (CESPE/AFT/2013) Se T_I = 5 e T_{II} = 8, então, depois que o brinquedo foi ligado, as bolas nunca mais se encontrarão simultaneamente no ponto A.

11. (CESPE/AFT/2013) Se T_I = 3, então, quando o mostrador Tempo indicar 15 segundos, a bola I estará no ponto B.

12. (CESPE/AFT/2013) Se T_{II} = 5, então, quando o mostrador Tempo indicar 64 segundos, a bola II estará mais próxima de C do que de A.

Texto para as próximas questões

Considerando que N seja o conjunto de todos os números inteiros maiores ou iguais a 1 e que, para cada m ∊ N o conjunto A(m) seja o subconjunto de N formado por todos os números divisíveis por m, julgue os itens a seguir.

13. (CESPE/ANS/2013) O conjunto A(15)∩A(10) contém o conjunto A(60).

14. (CESPE/ANS/2013) O conjunto A(6)∪A(8) contém o conjunto A(14).

15. (CESPE/STM/2011) Acerca dos conjuntos A = {6, 8, 10, 12} e B = {4, 6, 10}, julgue o seguinte item.

O mínimo múltiplo comum dos elementos do conjunto A / B = {x ∈A; x ∉B} é múltiplo de 5.

16. (CESPE/MPE AM/2008) Ainda com relação a números naturais, inteiros, racionais e reais, fatoração e números primos, razões e proporções e porcentagens, julgue o seguinte item.

Considere que em determinado país as eleições para deputados ocorrem de 4 em 4 anos, para prefeitos, de 6 em 6 anos, e para senadores, de 8 em 8 anos. Se neste ano foram realizadas eleições para esses três cargos, então a próxima vez que as eleições para esses três cargos ocorrerão novamente no mesmo ano será daqui a mais de 20 anos.

17. (CESPE/MPE AM/2008) Ainda com relação a números naturais, inteiros, racionais e reais, fatoração e números primos, razões e proporções e porcentagens, julgue o seguinte item.

Considere a seguinte situação.

Para a manutenção das instalações hidráulicas do prédio do Ministério Público, um artífice hidráulico recebeu tubos de PVC de 3 comprimentos diferentes: 5 peças de 240 cm cada uma, 2 peças de 420 cm cada uma e 4 peças de 600 cm cada uma. Para economia de material, o engenheiro chefe recomendou ao artífice que cortasse cada um desses tubos em pedaços que tivessem o mesmo comprimento, que esse comprimento fosse o maior possível e que de cada tubo não sobrasse nenhum pedaço.

Nessa situação, é correto afirmar que, depois de cortar todos os tubos seguindo a recomendação do engenheiro, o artífice obteve menos de 70 pedaços de tubo.

18. (CESPE/MPE RR/2008) Com relação a números e operações com números, julgue o seguinte item.

Se, para a copa de um tribunal, a compra de pó de café é feita a cada 12 dias e a de açúcar, a cada 20 dias, e se, no dia 1.º de maio, para essa copa, foi feita a compra dos dois produtos juntos, então, a próxima vez que será feita novamente a compra dos dois produtos juntos será em algum dia do mês de julho.

19. (CESPE/PGE PA/2007) A frota de veículos de uma empresa é composta de x veículos. Sabe-se que o máximo divisor comum entre x e 24 é igual a 12 e que 72 é o mínimo múltiplo comum entre x e 24. Nessa situação, é correto afirmar que o número de divisores positivos de x é igual a

a) 7.

b) 8.

c) 9.

e) 10.

20. (CESPE/TJ RR/2006) Considere que um tribunal tenha 24 motoristas e 36 auxiliares administrativos e que, para agilizar o atendimento aos magistrados e demais servidores da casa, o presidente determine que os motoristas e os auxiliares sejam divididos em equipes. Cada equipe deve ser formada apenas por profissionais do mesmo cargo, deve ter o mesmo número de elementos e esse número de elementos deve ser o maior possível. Nessa situação, o número de equipes de motoristas, o número de equipes de auxiliares administrativos e o número de elementos em cada equipe serão, respectivamente, iguais a

a) 4, 6 e 6.

b) 6, 9 e 4.

c) 2, 3 e 12.

d) 8, 12 e 3.

21. (CESPE/TJ RR/2006) Em um bairro, a coleta de lixo ocorre de 3 em 3 dias e o caminhão que vende gás de cozinha passa de 8 em 8 dias. No dia de hoje, ocorreu a coleta de lixo e passou o caminhão vendendo gás de cozinha. Então, a próxima vez que ocorrerá a coleta de lixo e passará o caminhão vendendo gás em um mesmo dia será daqui a

a) 24 dias.

b) 21 dias.

c) 18 dias.

d) 15 dias.

GABARITO - CEBRASPE

MMC e MDC

1. LETRA C
2. CERTO
3. CERTO
4. CERTO
5. ERRADO
6. ERRADO
7. CERTO
8. ERRADO
9. ERRADO
10. ERRADO
11. CERTO
12. CERTO
13. CERTO
14. ERRADO
15. ERRADO
16. CERTO
17. ERRADO
18. ERRADO
19. LETRA C
20. LETRA C
21. LETRA A

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.

2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).

3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).

4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).

5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).

6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).

7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.

8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.