

POLINÔMIOS - APROFUNDAMENTO

* DERIVADAS *

$$P(x) = x^n \rightarrow P'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^4$$

$$g(x) = 3x^{10} \rightarrow g'''(x) = 30x^9$$

$$h(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$$

$$h'''(x) = 6x' + 8x - 5$$

$$h^{(2)}(x) = 12x + 8$$



TEOREMA

SE "a" É RAIZ DE MULTIPLICIDADE K
DO POLINÔMIO $p(x)$.

ENTÃO "a" É RAIZ DE
MULTIPLICIDADE $K-1$ DE $p'(x)$.

3 É RAIZ DE MULT. 4 DE $p(x) \Rightarrow (x-3)^4$



3 É RAIZ DE MULT. 3 DE $p'(x) \Rightarrow (x-3)^3$



$$\text{DEM.: } p(x) = (x-a)^K \cdot q(x) \quad ; \quad q(a) \neq 0$$

$$p'(x) = (x-a)^K \cdot q'(x) + q(x) \cdot K(x-a)^{K-1}$$

$$p'(x) = \underbrace{(x-a)^{K-1} \cdot (x-a)}_{(x-a)} q'(x) + q(x) \cdot \underbrace{K(x-a)^{K-1}}_{K(x-a)^{K-1}}$$

$$p'(x) = (x-a)^{K-1} \left[\underbrace{(x-a) \cdot q'(x) + K \cdot q(x)}_{s(x)} \right]$$

$$s(x)$$

$$s(a) = \cancel{(a-a)q'(a)} + K \cdot q(a)$$

$$= K \cdot q(a) \neq 0$$

$$p'(x) = (x-a)^{K-1} \cdot s(x) \quad ; \quad s(a) \neq 0$$

$\hookrightarrow a$ é Raiz De

Mult. $K-1$



$$p(x) = (x-1)^3(x+2) \rightarrow 1 \text{ é RAIZ TRIPLA}$$

$$p'(x) = (x-3)^3 \cdot 1 + (x+2) \cdot 3(x-1)^2$$

$$p'(x) = (x-3)^2(x-3) + 3(x-1)^2(x+2)$$

$$p'(x) = (x-3)^2[(x-3) + 3(x+2)]$$

$$p'(x) = (x-3)^2(4x+3) \rightarrow 3 \text{ é RAIZ DUPLA DE } p'(x)$$



CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA

a	É	RAIZ	DE	MULTIPLICIDADE	K	DE	$p(x)$
a	É	RAIZ	DE	MULTIPLICIDADE	$K-1$	DE	$p^{(1)}(x)$
a	É	RAIZ	DE	MULTIPLICIDADE	$K-2$	DE	$p^{(2)}(x)$
a	É	RAIZ	DE	MULTIPLICIDADE	$K-3$	DE	$p^{(3)}(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	É	RAIZ	DE	MULTIPLICIDADE	1	DE	$p^{(K-1)}(x)$
a	É	RAIZ	DE	MULTIPLICIDADE	0	DE	$p^{(K)}(x)$



MOSTRE QUE 2 É RAIZ TRIPLA DE

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$$

2 é Raiz Mult. 3 de $p(x)$

2 é Raiz Mult. 2 de $p'(x)$ ✓

2 é Raiz Mult. 1 de $p''(x)$ ✓

2 é Raiz Mult. 0 de $p'''(x)$

$$p(2) = 0$$

$$p'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 20 \rightarrow p'(2) = 0$$

$$p''(x) = 12x^2 - 42x + 36 \rightarrow p''(2) = 0$$

$$p'''(x) = 24x - 42 \rightarrow p'''(2) = 6 \neq 0$$

2 NÃO É RAIZ DE $p'''(x)$



EXEMPLO

Mostre que 1 é raiz tripla de

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$$

1 é raiz de mult. 3 de $p(x)$

1 é raiz de mult. 2 de $p'(x)$

1 é raiz de mult. 1 de $p''(x)$

1 é raiz de mult. 0 de $p'''(x)$

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 \rightarrow p(1) = 0$$

$$p'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x - 7 \rightarrow p'(1) = 0$$

$$p''(x) = 12x^2 - 30x + 18 \rightarrow p''(1) = 0$$

$$p'''(x) = 24x - 30 \rightarrow p'''(1) = -6 \neq 0$$



EXEMPLO

CALCULE AS RAÍZES DO POLINÔMIO SABENDO QUE ELE POSSUI UMA RAÍZ DUPLA.

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

a É RAÍZ DUPLA DE $p(x) \rightarrow p(a) = 0$

a É RAÍZ SIMPLES DE $p'(x) \rightarrow p'(a) = 0$

$$p'(x) = 3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15 = 196 - 180 = 16$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{6} \rightarrow x = 3 ; x = \frac{5}{3}$$

$$p(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 9 = 27 - 63 + 45 - 9 = 0$$

3 É RAÍZ DUPLA DE $p(x)$

$$p\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 9 \neq 0$$

EXEMPLO

CALCULE AS RAÍZES DO POLINÔMIO SABENDO QUE ELE POSSUI UMA RAÍZ TRIPLA.

$$p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$$

a é RAÍZ TRIPLA DE $p(x)$

a é RAÍZ DUPLA DE $p'(x)$

a é RAÍZ SIMPLES DE $p''(x) \rightarrow p''(a) = 0$

$$p'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$$

$$p''(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6(2x^2 + x - 1)$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1)$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} ; x = -1$$

$$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 3(-1)^2 - 5(-1) - 2$$

$$p(-1) = 1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0$$

-1 é RAÍZ TRIPLA DE $p(x)$



Raizes : $-1, -1, -1 \in b$

R. GIRARD : $-3 + b = -1$

$$b = 2$$

Raizes : $\{-1, -1, -1, 2\}$



EXEMPLO

SEJA $p(x) = ax^{c+1} + bx^c + 1$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

SE $p(x)$ É DIVISÍVEL POR $(x-1)^2$ E O VALOR NUMÉRICO DO QUOCIENTE NESSA DIVISÃO QUANDO $x = 1$ É 120, CALCULE a, b E c .

1 É RAIZ DUPLA DE $p(x) \rightarrow p(1) = 0$

1 É RAIZ SIMPLES DE $p'(x) \rightarrow p'(1) = 0$

$$p(1) = 0 \rightarrow a \cdot 1^{c+1} + b \cdot 1^c + 1 = 0$$

$$\boxed{a + b = -1} \rightarrow b = -1 - a$$

$$p'(x) = a \cdot (c+1)x^c + b \cdot cx^{c-1}$$

$$p'(1) = 0 \rightarrow a(c+1) \cdot 1^c + b \cdot c \cdot 1^{c-1} = 0$$

$$ac + a + bc = 0$$

$$c(a+b) + a = 0$$

-1



→

$$\boxed{a = c}$$

$$p(x) = \frac{1(x-1)^2}{q(x)} \rightarrow \underline{p(x) = (x-1)^2 \cdot q(x)}$$

$$q(1) = 120$$

$$p'(x) = (x-1)' \cdot q'(x) + q(x) \cdot 2(x-1)$$

$$p''(x) = (x-1)'' \cdot q'' + q'(x) \cdot 2(x-1) + 2 \left[q(x) \cdot 1 + (x-1) \cdot q'(x) \right]$$

$$p''(x) = (x-1)'' q'' + 2(x-1) q' + 2 \left[q + (x-1) q' \right]$$

$$p''(1) = 2q(1) \rightarrow p''(1) = 2 \cdot 120 \rightarrow \boxed{p''(1) = 240}$$

$$p'(x) = a(a+1) \cdot x^a + b \cdot a \cdot x^{a-1}$$

$$p''(x) = a(a+1)a x^{a-1} + (-1-a)a(a-1) \cdot x^{a-2}$$

$$p''(1) = a^2(a+1) - (a+1) \cdot a(a-1)$$

$$240 = \cancel{a^3} + a^2 - (\cancel{a^3} - a) \rightarrow \boxed{a^2 + a - 240 = 0}$$

$$\downarrow$$

$$a = 15 \in \cancel{a = -16}$$

$$\boxed{a = 15 ; b = -16 ; c = 15}$$



* SOMAS DE NEWTON *

MOTIVADOR

SEJAM x_1, x_2, x_3 E x_4 AS RAÍZES DO POLINÔMIO

$$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

CALCULE O VALOR DE $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5$

OPÇÕES {

- * CALCULAR TODAS AS RAÍZES
- * SOMAS DE NEWTON



$p(x)$: POLINÔMIO DE GRAU n DA FORMA

$$p(x) = x^n + b x^{n-1} + c x^{n-1} + \dots$$

Raízes: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

DEFINIÇÃO:

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_n^k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + \dots + x_n^0$$

$$S_1 = x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 + \dots + x_n^1$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$S_9 = x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 + \dots + x_n^9$$



Mas ... E Se $a \neq 1$?

↳ MANIPULATION !

$$p(x) = 3x^4 + 5x^2 + 6x + 1$$

↓ : 3

$$p^*(x) = x^4 + \frac{5}{3}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$$

$p(x)$ e $p^*(x)$ → POLINÔMIOS EQUIVALENTES

$$p(x) = K p^*(x)$$

↳ MESMOS RAÍZES

↳ MESMOS

SOMAS DE NEWTON



PARTE I

POLINÔMIO DE GRAU n : $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$

$$n = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \\ \text{RAÍZES : } x_1, x_2, x_3 \end{array} \right. \quad \rightarrow d \neq 0$$

$$* S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 1 + 1 + 1 \rightarrow S_0 = 3$$

$$* S_1 = x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = -b \rightarrow S_1 + b = 0$$

$$* S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{-b} \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{S_1} - \\ &\quad - 2 \underbrace{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)}_c = -b S_1 - 2c \end{aligned}$$

$$S_2 + b S_1 + 2c = 0$$

$$* S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{-b} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{S_2} -$$

$$- \underbrace{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)}_c \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{S_1} + \underbrace{3x_1 x_2 x_3}_{-d}$$

$$S_3 = -bS_2 - cS_1 - 3d$$

$$S_3 + bS_2 + cS_1 + 3d = 0$$

$$p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$S_0 = 3$$

$$S_1 + b = 0$$

$$S_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$S_3 + bS_2 + cS_1 + 3d = 0$$



GENERALIZAÇÃO :

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \neq 0 \end{matrix}$$

$$S_0 = n$$

$$S_1 + a_{n-1} = 0$$

$$S_2 + a_{n-1}S_1 + 2a_{n-2} = 0$$

$$S_3 + a_{n-1}S_2 + a_{n-2}S_1 + 3a_{n-3} = 0$$

$$S_4 + a_{n-1}S_3 + a_{n-2}S_2 + a_{n-3}S_1 + 4a_{n-4} = 0$$

$\vdots$

$$S_n + a_{n-1}S_{n-1} + a_{n-2}S_{n-2} + \dots + a_1S_1 + n.a_0 = 0$$



$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 3x + 5$$

CALCULE $S_0, S_1, S_2, S_3 \in S_4$.

$$S_0 = 4$$

$$S_1 + 2 = 0 \rightarrow S_1 = -2$$

$$S_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$S_2 + 2(-2) + 2 \cdot 6 = 0 \rightarrow S_2 = -8$$

$$S_3 + bS_2 + cS_1 + 3d = 0$$

$$S_3 + 2(-8) + 6(-2) + 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow S_3 = 19$$

$$S_4 + bS_3 + cS_2 + dS_1 + 4e = 0$$

$$S_4 + 2(19) + 6(-8) + 3(-2) + 4 \cdot 5 = 0$$

$$S_4 = -4$$



EXEMPLO

$$\text{SEJA } p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 7$$

CALCULE S_0, S_1, S_2, S_3 E S_4 .

$$S_0 = 4$$

$$S_1 + b = 0 \rightarrow S_1 = -2$$

$$S_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$S_2 + 2(-2) + 2(-3) = 0 \rightarrow S_2 = 10$$

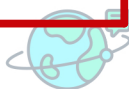
$$S_3 + bS_2 + cS_1 + 3d = 0$$

$$S_3 + 2(10) - 3(-2) + 3 \cdot 6 = 0 \rightarrow S_3 = -44$$

$$S_4 + bS_3 + cS_2 + dS_1 + 4 \cdot e = 0$$

$$S_4 + 2(-44) - 3(10) + 6 \cdot (-2) + 4 \cdot (-7) = 0$$

$$S_4 = 148$$



EXEMPLO

SEJAM a, b E c AS RAÍZES DE

$$p(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 7$$

CALCULE O VALOR DE $\underbrace{a^3 + b^3 + c^3}_{S_3}$.

$$S_1 + b = 0$$

$$S_1 + 4 = 0 \rightarrow S_1 = -4$$

$$S_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$S_2 + 4(-4) + 2 \cdot 5 = 0 \rightarrow S_2 = 6$$

$$S_3 + bS_2 + cS_1 + 3d = 0$$

$$S_3 + 4(6) + 5(-4) + 3(7) = 0$$

$$S_3 = -25$$



PARTE II

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ \text{RAÍZES : } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \end{array} \right.$$

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = 0 \quad \left(x_1^{K-n} \right)$$

$$a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = 0 \quad \left(x_2^{K-n} \right)$$

$$a_n x_3^n + a_{n-1} x_3^{n-1} + \dots + a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 = 0 \quad \left(x_3^{K-n} \right)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = 0 \quad \left(x_n^{K-n} \right)$$



$$\begin{array}{c}
 \text{Red box: } a_n x_1^k + a_{n-1} x_1^{k-1} + \dots + a_2 x_1^{k-n+2} + a_1 x_1^{k-n+1} + a_0 x_1^{k-n} = 0 \\
 \text{Blue box: } a_n x_2^k + a_{n-1} x_2^{k-1} + \dots + a_2 x_2^{k-n+2} + a_1 x_2^{k-n+1} + a_0 x_2^{k-n} = 0 \\
 \text{Green box: } a_n x_3^k + a_{n-1} x_3^{k-1} + \dots + a_2 x_3^{k-n+2} + a_1 x_3^{k-n+1} + a_0 x_3^{k-n} = 0 \\
 \text{Pink box: } a_n x_n^k + a_{n-1} x_n^{k-1} + \dots + a_2 x_n^{k-n+2} + a_1 x_n^{k-n+1} + a_0 x_n^{k-n} = 0
 \end{array}$$

⊕

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + \dots + a_2 s_{k-n+2} + a_1 s_{k-n+1} + a_0 s_{k-n} = 0$$

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + \dots + a_2 s_{k-n+2} + a_1 s_{k-n+1} + a_0 s_{k-n} = 0$$



ESCREVA AS SOMAS DE NEWTON DO POLINÔMIO:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$aS_k + bS_{k-1} + cS_{k-2} + dS_{k-3} = 0$$

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 + dS_0 = 0$$

$$aS_7 + bS_6 + cS_5 + dS_4 = 0$$

$$aS_{-1} + bS_{-2} + cS_{-3} + dS_{-4} = 0$$

$$aS_1 + bS_0 + cS_{-1} + dS_{-2} = 0$$



EXEMPLO

SEJAM a, b e c AS RAÍZES DO POLINÔMIO

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$$

Calcule: i) $a^4 + b^4 + c^4$

ii) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$$a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \dots = 0$$

$$K = 4 \rightarrow \underline{S_4 + 3S_3 + 2S_2 + 5S_1 = 0}$$

$$S_1 + 3 = 0 \rightarrow \boxed{S_1 = -3}$$

$$S_2 + 3(-3) + 2 \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{S_2 = 2}$$

$$S_3 + 3(2) + 2(-3) + 3 \cdot 5 = 0 \rightarrow \boxed{S_3 = -15}$$



$$S_4 + 3(-15) + 2(2) + 5(-3) = 0$$

$$(1) \quad \boxed{S_4 = 56}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = S_{-2}$$

$$S_{-2} \quad S_{-1} \quad \textcircled{S_0} \quad \textcircled{S_1} \quad \textcircled{S_2} \quad \textcircled{S_3} \quad \textcircled{S_4}$$

$$K=3 \rightarrow S_3 + 3S_2 + 2S_1 + 5S_0 = 0$$

$$-15 + 3(2) + 2(-3) + 5S_0 = 0 \rightarrow \boxed{S_0 = 3}$$

$$K=2 \rightarrow S_2 + 3S_1 + 2S_0 + 5S_{-1} = 0$$

$$2 + 3(-3) + 2 \cdot 3 + 5S_{-1} = 0$$

$$5S_{-1} = 1 \rightarrow \boxed{S_{-1} = 1/5}$$

$$K=1 \rightarrow S_1 + 3S_0 + 2 \cdot S_{-1} + 5 \cdot S_{-2} = 0$$

$$-3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{5} + 5S_{-2} = 0$$

$$5S_{-2} = -\frac{32}{5} \rightarrow \boxed{S_{-2} = -\frac{32}{25}}$$



EXEMPLO

SEJAM $r_1, r_2, \dots, r_{1000}$ AS RAÍZES DO POLINÔMIO

$$p(x) = x^{1000} - 10x + 10$$

CALCULE O VALOR DE $r_1^{1000} + r_2^{1000} + \dots + r_{1000}^{1000}$

$$r_1^{1000} + r_2^{1000} + \dots + r_{1000}^{1000} = S_{1000}$$

$$a_n \cdot S_k + a_{n-1} \cdot S_{k-1} + \dots + a_0 \cdot S_{k-n} = 0$$

$$1. S_{1000} + \cancel{0 \cdot S_{999}} + \cancel{0 \cdot S_{998}} + \dots + \cancel{0 \cdot S_1} - 10 \cdot \overset{0}{S_0} + 10 \overset{1000}{S_0} = 0$$

$$S_{1000} + 10 \cdot 1000 = 0$$

$$S_{1000} = -10.000$$



EXEMPLO

CALCULE O VALOR DE $a.b.c$ SABENDO QUE

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$a.b.c = \frac{-8}{1}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 9$$

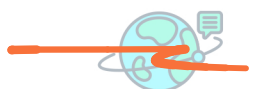
$$S_3 = 1$$

$$S_1 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -1$$

$$S_2 + \alpha S_1 + 2\beta = 0 \rightarrow \beta = -4$$

$$S_3 + \alpha S_2 + \beta S_1 + 3\gamma = 0 \rightarrow 3\gamma = 12$$
$$\gamma = 4$$

$$a.b.c = \frac{-\gamma}{1}$$



UNIVERSO NARRADO

$$a.b.c = -4$$

EXEMPLO

Se $x + y = 5$ e $x^2 + y^2 = 9$, calcule

$$x^5 + y^5$$

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta \rightarrow \text{Raízes } x \text{ e } y$$

$$S_1 = 5$$

$$S_2 = 9 ; \quad S_5 = ?$$

$$S_1 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -5$$

$$S_2 + \alpha S_1 + 2\beta = 0 \rightarrow \beta = 8$$

$$p(z) = z^2 - 5z + 8$$

$$S_k - 5S_{k-1} + 8S_{k-2} = 0$$



$$k = 3 \rightarrow S_3 - 5S_2 + 8S_1 = 0$$

$$S_3 - 5 \cdot 9 + 8 \cdot 5 = 0$$

$$S_3 = 5$$

$$k = 4 \rightarrow S_4 - 5S_3 + 8S_2 = 0$$

$$S_4 - 5(5) + 8 \cdot 9 = 0$$

$$S_4 = -47$$

$$k = 5 \rightarrow S_5 - 5S_4 + 8S_3 = 0$$

$$S_5 - 5(-47) + 8 \cdot 5 = 0$$

$$S_5 = -275$$



EXEMPLO

Se $a + b + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Mostre que $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$

$$p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \rightarrow \text{Raízes } a, b, c$$

$$\cancel{S_1}^{\rightarrow 0} + \alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$p(x) = x^3 + \beta x + \gamma$$

$$S_2 + 0 S_1 + 2\beta = 0 \rightarrow \boxed{S_2 = -2\beta}$$

$$S_3 + \cancel{0}^{\rightarrow 0} S_2 + \beta \cancel{S_1}^{\rightarrow 0} + 3\gamma \rightarrow \boxed{S_3 = -3\gamma}$$



$$S_k + \beta S_{k-1} + \gamma S_{k-2} = 0$$

$$k = 5 \rightarrow S_5 + \beta S_4 + \gamma S_3 = 0$$

$$S_5 + \beta(-3r) + \gamma(1 \cdot 2\beta) = 0$$

$$\boxed{S_5 = 5\beta r} \rightarrow \frac{S_5}{5} = \beta r$$

$$\frac{S_2}{2} \cdot \frac{S_3}{3} = \frac{-2\beta}{2} \cdot \frac{-3r}{3} = \beta r$$

$$\frac{S_5}{5} \cdot \frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_2}{2} \quad \checkmark$$



EXEMPLO

(OBM - FASE 3)

SEJAM $a + b + c = 0$, Com $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

CALCULE OS VALORES POSSÍVEIS DE

$$K = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2 (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$$

$$K = \frac{(S_3)^2 \cdot S_4}{(S_5)^2}$$

$$p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$a + b + c = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

$$p(x) = x^3 + \beta x + \gamma$$



$$S_2 + \cancel{\alpha S_1^0} + 2\beta = 0 \rightarrow S_2 = -2\beta$$

$$S_3 + \cancel{\alpha S_2^0} + \beta \cancel{S_1^0} + 3\gamma = 0 \rightarrow S_3 = -3\gamma$$

$$S_k + \beta S_{k-2} + \gamma S_{k-3} = 0$$

$$K=4 \rightarrow S_4 + \beta S_2 + \gamma \cancel{S_1^0} = 0$$

$$S_4 = -\beta \cdot (-2\beta)$$

$$S_4 = 2\beta^2$$

$$K=5 \rightarrow S_5 + \beta S_3 + \gamma S_2 = 0$$

$$S_5 + \beta(-3\gamma) + \gamma(-2\beta) = 0$$

$$S_5 = 5\beta\gamma$$

$$K = \frac{(-3\gamma)^2 \cdot 2\beta^2}{(5\beta\gamma)^2} = \frac{18\cancel{\beta^2}\cancel{\gamma}}{25\cancel{\beta^2}\cancel{\gamma^2}} \rightarrow K = \frac{18}{25}$$



EXEMPLO

DETERMINE AS RAÍZES REAIS DA EQUAÇÃO

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{272 - x} = 6$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x} = a &\rightarrow \boxed{a^4 = x} \\ \sqrt[4]{272 - x} = b &\rightarrow \boxed{b^4 = 272 - x} \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{l} a^4 + b^4 = 272 \\ a + b = 6 \end{array}$$

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta \quad \text{z, Raízes } a, b$$

$$\underline{S_0 = 2}$$

$$\underline{S_1 = 6}$$

$$\underline{S_4 = 272}$$

$$S_1 + \alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = -6}$$

$$S_k + \alpha \cdot S_{k-1} + \beta S_{k-2} = 0$$

$$\boxed{S_k = 6S_{k-1} - \beta S_{k-2}}$$



$$S_2 = 6.S_1 - \beta.S_0 \rightarrow S_2 = -2\beta + 36$$

$$S_3 = 6.S_2 - \beta.S_1 \rightarrow S_3 = -18\beta + 216$$

$$S_4 = 6.S_3 - \beta.S_2 \rightarrow S_4 = 2\beta^2 - 144\beta + 1296$$

$\hookrightarrow 272$

$$2\beta^2 - 144\beta + 1296 = 272$$

$$2\beta^2 - 144\beta + 1024 = 0$$

$$\beta^2 - 72\beta + 512 = 0$$

$$\begin{aligned} \beta &= 8 \\ \beta &= 64 \end{aligned}$$

$$P(z) = z^2 - 6z + 8$$



$$a = 2 ; b = 4$$

$$a = 4 ; b = 2$$

$$P(z) = z^2 - 6z + 64$$



$$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 64 < 0$$

$$\nexists a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[4]{x} = a \rightarrow x = a^4 \rightarrow x = 2^4 = 16$$

$$x = 4^4 = 256$$



EQUAÇÕES RECÍPROCAS

Se r e $\frac{1}{r}$ SÃO RAÍZES
DE $p(x)$ COM MESMA MULTIPLICIDADE,
ENTÃO A EQUAÇÃO $p(x) = 0$
É DITA EQUAÇÃO RECÍPROCA.

$$4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{RAÍZES : } 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{RAÍZES : } 3, \frac{1}{3}, -4, -\frac{1}{4}$$



OBSERVATION # 1

$$1 = \frac{1}{1} \quad ; \quad -1 = \frac{1}{-1}$$

OS NÚMEROS 1 E -1 SÃO IGUAIS AOS SEUS INVERSOS. LOGO PODEM NÃO APARECER AOS PARES EM EQUAÇÕES RECÍPROCAS.

$$6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{RAÍZES: } 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$

$$6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{RAÍZES: } -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$



OBSERVATION # 2

MANDAMENTO Nº 1 DA MATEMÁTICA
'NÃO DIVIDIRÁS POR ZERO'

O NÚMERO ZERO NÃO POSSUI INVERSO.

$$\frac{1}{0}$$

→ ZERO NUNCA É RAIZ DE UMA EQ. RECÍPROCA

↳ TERMO INDEPENDENTE $\neq$ ZERO

$$x^3 - 3x^2 + x = 0 \rightarrow \text{NÃO É EQ. RECÍPROCA}$$

$$x(x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\downarrow$$
$$0 \quad \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$



RECONHECIMENTO DE UMA EQ. RECÍPROCA

x É RAIZ:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$\frac{1}{x}$ É RAIZ:

$$\left(a_n \cdot \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_0 = 0 \right) x^n$$

$$a_n + a_{n-1} \cdot x + \dots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n = 0$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

EQUAÇÕES EQUIVALENTES



$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = K \cdot a_0 \\ a_0 = K \cdot a_n \end{array} \right\} \quad \cancel{a_n} = K \cdot K \cdot \cancel{a_n} \rightarrow K^2 = 1$$

$$K = \pm 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = K \cdot a_n \\ a_n = K \cdot a_{n+1} \end{array} \right.$$

EQUAÇÃO RECÍPROCA



COEFICIENTES EQUIDISTANTES
IGUAIS OU OPPOSTOS



EQUAÇÕES RECÍPROCAS DE PRIMEIRA CLASSE

↳ COEFICIENTES EQUIDISTANTES IGUAIS

$$2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$



EQUAÇÕES RECÍPROCAS DE SEGUNDA CLASSE

↳ COEFICIENTES EQUIDISTANTES OPOSTOS

$$2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = 0$$

~~$$x^2 + 3x - 1 = 0$$~~

OBS: SE FOR DE GRAU PAR



TERMO CENTRAL IGUAL A ZERO

$$2x^4 + 3x^3 + \del{4x^2} - 3x - 2 = 0$$

↓
0

$$2x^4 + 3x^3 + \quad - 3x - 2 = 0 \quad \checkmark$$



RESOLUÇÃO DE EQ. RECÍPROCAS

I) EQ. RECÍPROCA: 1ª CLASSE E ORDEM PAR

$$\frac{12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12}{x^2} = 0$$

$$12x^2 - 56x + 89 - \frac{56}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (t)^2 \rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$



$$12.(t^2 - 2) - 56t + 89 = 0$$

$$12t^2 - 56t + 65 = 0$$

$$\Delta = (-56)^2 - 4.12.65 \rightarrow \boxed{\Delta = 16}$$

$$t = \frac{56 \pm 4}{24} \rightarrow t' = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$$

$$t'' = \frac{52}{24} = \frac{13}{6}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4.2.2 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \boxed{x = 2}; \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \rightarrow 6x^2 + 6 = 13x \rightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$\Delta = 169 - 4.6.6 = 25$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{12} \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}; \boxed{x = \frac{2}{3}}$$



EXEMPLO

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

$$\underline{6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0}$$

x^2

$$6x^2 - 35x + 62 - \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$6(t^2 - 2) - 35t + 62 = 0$$

$$6t^2 - 35t + 50 = 0$$



$$\Delta = (35)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 50 \rightarrow \underline{\Delta = 25}$$

$$t = \frac{35 \pm 5}{12} \rightarrow t = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

$$t = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$



II) EQ. RECÍPROCA: 1ª CLASSE E ORDEM ÍMPAR

$$p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$$

$$p(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$$

- 1 SEMPRE É RAIZ

$$18x^5 - 81x^4 + 67x^3 + 67x^2 - 81x + 18 = 0$$

- 1		18	- 81	67	67	- 81	18
		18	- 99	166	- 99	18	0

$$18x^4 - 99x^3 + 166x^2 - 99x + 18 = 0$$

EQ. REC. 1ª CLASSE GRAU PAR



EXEMPLO

$$8x^5 - 46x^4 + 47x^3 + 47x^2 - 46x + 8 = 0$$

-1 é Raiz!

-1	8	-46	47	47	-46	8
	8	-54	101	-54	8	0

$$8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$$

x^2

$$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 54\left(x + \frac{1}{x}\right) + 101 = 0$$

$t^2 - 2$ t

$$8(t^2 - 2) - 54t + 101 = 0$$

$$8t^2 - 54t + 85 = 0$$

$$t = \frac{5}{2} \quad ; \quad \frac{17}{4}$$

$$x = 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}$$



III) EQ. RECÍPROCA: 2ª CLASSE E ORDEM ÍMPAR

$$p(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 - dx^3 - cx^2 - bx - a$$

$$p(1) = a + b + c + d - d - c - b - a = 0$$

1 SEMPRE É RAIZ

$$8x^5 - 62x^4 + 155x^3 - 155x^2 + 62x - 8 = 0$$

1	8	-62	155	-155	62	-8
	8	-54	101	-54	8	0 ✓

$$8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$$

EQ. REC. 1ª CLASSE ORDEM PAR



EXEMPLO

$$10x^5 - 87x^4 + 227x^3 - 227x^2 + 87x - 10 = 0$$

Eq. Rec. 2ª Classe Ordem Ímpar

1 é Raiz

1	10	-87	227	-227	87	-10
	10	-77	150	-77	10	0

$$10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$$

Eq. Rec. 1ª Classe Ordem Par



IV) E.O. RECÍPROCA: 2ª CLASSE E ORDEM PAR

$$p(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + \cancel{dx^3} - cx^2 - bx - a = 0$$

$$p(1) = 0 \rightarrow 1 \text{ é Raiz}$$

$$p(-1) = a - b + c - c + b - a = 0 \rightarrow -1 \text{ é Raiz}$$

1 e -1 SEMPRE SÃO RAÍZES

$$10x^6 - 77x^5 + 14x^4 - 14x^2 + 77x - 10 = 0$$

1	10	-77	14	0	-14	77	-10
	10	-67	-53	-53	-67	10	0

✓

$$10x^5 - 67x^4 - 53x^3 - 53x^2 - 67x + 10 = 0$$

-1	10	-67	-53	-53	-67	10
	10	-77	24	-77	10	0

✓

$$10x^4 - 77x^3 + 24x^2 - 77x + 10 = 0$$

EXEMPLO

$$12x^6 - 91x^5 + 182x^4 - 182x^3 + 91x^2 - 12 = 0$$

1 e -1 São Raízes

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} 1 & 12 & -91 & 182 & 0 & -182 & 91 & -12 \\ & 12 & -79 & 103 & 103 & -79 & 12 & 0 \end{array} \quad \checkmark$$

$$12x^5 - 79x^4 + 103x^3 + 103x^2 - 79x + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} -1 & 12 & -79 & 103 & 103 & -79 & 12 \\ & 12 & -91 & 194 & -91 & 12 & 0 \end{array} \quad \checkmark$$

$$12x^4 - 91x^3 + 194x^2 - 91x + 12 = 0$$

Eq. Rec. 1ª Classe Ordem Par.

$$\left\{ 4, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{3}, 1, -1 \right\}$$

